Делимость натуральных чисел

В статье рассматриваются задачи группы С6, предлагаемые на ЕГЭ по математике и в тренировочных работах, основанные на теории чисел, в частности, на понятии делимости, наибольшего общего делителя, решении уравнений в целых числах. Статья может служить хорошим подспорьем при подготовке к ЕГЭ по математике.

Первые числа, с которыми сталкивается любой учащийся, приступающий к изучению математики, – это натуральные числа. Одно из определений множества этих чисел – числа, используемые при счёте предметов. Множество натуральных чисел обычно обозначается символом $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$. Среди натуральных чисел есть наименьший элемент, но нет наибольшего. Наименьший элемент, т. е. наименьшее натуральное число – единица – играет огромную роль в построении теории чисел.

Задача 1. Найдите целочисленные решения неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2x-7y-2}}+\frac{1}{\sqrt{-2x+7y+4}}>$$
$$>x^2-10x+26.$$

Решение. Исходя из требований задачи о целочисленности решения, получим, что при искомых значениях переменных значения выражений, стоящих под знаками радикала, будут также целыми и положительными, т. е. будут натуральными числами. Но, заметив, что $(2x-7y-2)+$ $+(-2x+7y+4)=2$, получим, что каждое из выражений должно принимать значение, равное 1, т. к. 1 – наименьший элемент натурального ряда чисел, и сумма двух натуральных чисел равна 2 тогда и только тогда, когда каждое их них равно 1.

Получаем, что исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases}2x-7y-2=1,\\ 2>x^2-10x+26\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-10x+24<0,\\ 7y=2x-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4<x<6,\\ 7y=2x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ. $(5;1)$.

Определение. Будем говорить, что натуральное число n делится на натуральное число m, если найдётся такое натуральное число k, что $n=m\cdot k$.

Числа m и k называются делителями натурального числа n. Очевидно, что любое натуральное число, кроме единицы, имеет как минимум два делителя – единицу и самого себя: $n = 1 \cdot n$.

Делители натурального числа n, отличные от единицы и самого числа n называются собственными делителями, а 1 и – несобственными делителями натурального числа.

Числа, имеющие собственные делители, называются составными, а имеющие только несобственные делители – простыми. Сразу отметим, что первое натуральное число, т. е. единица, не относится ни к простым, ни к составным в силу её уникальности.

1. Составные числа в задачах

Понятия делителя и разложимости натурального числа на множители – одни из наиболее часто используемых понятий в решении задач по теории чисел. Однако следует помнить, что число может быть разложено и в произведение отрицательных сомножителей, что увеличивает количество вариантов решения.

Задача 2. Решите уравнение в натуральных числах:

$$xy - 7y + 3x = 39.$$

Решение. Применяя метод группировки, получим, что

$$xy - 7y + 3x = 39 \Leftrightarrow y(x-7) +$$
$$+3(x-7) + 21 = 39 \Leftrightarrow (x-7)(y+3) = 18.$$

Записанное уравнение означает, что число 18 разложено в произведение двух своих делителей. Из требования натуральности решения получим, что второй сомножитель – положительное число, большее 3. Следовательно, и первый сомножитель должен быть положителен. Учитывая все условия, получим, что $18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$. Получаем три возможных варианта:

$$\begin{cases} x - 7 = 1, \\ y + 3 = 18, \end{cases} \begin{cases} x - 7 = 2, \\ y + 3 = 9, \end{cases} \begin{cases} \ - \ = \\ \ + 3 = 6. \end{cases}$$

Отсюда уравнению будут удовлетворять пары чисел: $(8; 15), (9; 6), (10; 3)$.

Ответ. $(8; 15), (9; 6), (10; 3)$.

Задача 3. Решите уравнение в натуральных числах:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 13.$$

Решение. Как и в предыдущих случаях, разложим левую часть уравнения на множители, рассматривая её как квадратный трёхчлен относительно переменной x с параметром y. Имеем:

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = (x-y)(x-2y) = 13.$$

Получим четыре возможных разложения числа:

$$13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1 = (-1) \cdot (-13) = (-13) \cdot (-1).$$

Составляя системы уравнений, получим, что:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11, \\ y = -12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 13, \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ y = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ x - 2y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11, \\ y = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = -13, \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -25, \\ y = -12. \end{cases}$$

Только два набора значений переменных отвечают условию натуральности решений.

Ответ. $(11;\ 12), (25;\ 12)$.

2. Делители натурального числа. Количество делителей натурального числа

Наиболее важной в теории чисел является теорема, называемая «основной теоремой арифметики».

Теорема. Любое натуральное число можно единственным образом разложить в произведение его простых делителей.

Представление натурального числа в виде $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_l$ – простые делители числа, а $k_1, k_2, \ldots, k_l$ – степени, с которыми простые делители входят в разложение (их ещё называют кратностями), называется каноническим разложением натурального числа. Напомним, что наименьшим простым числом является число 2.

3. Формула количества делителей натурального числа n

Всякий делитель натурального числа n, каноническое разложение которого задано формулой $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, может быть представлен в виде $m = p_1^{i_1} \cdot p_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{i_l}$, где кратность каждого делителя, выбираемого в произведение, может меняться от 0 (т. е. вместо делителя стоит 1) до максимальной кратности этого делителя. Поэтому первый сомножитель, входящий в делитель m, мы можем выбрать $k_1 + 1$ способами, второй – $k_2 + 1$ способами и т. д. Последний сомножитель в делителе m мы можем выбрать $k_l + 1$ способами. Вспоминая правило умножения при выборе элементов из каких либо множеств, получим, что количество способов написания делителя числа n а следовательно, и собственно их количество, задаётся формулой

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_l + 1),\ k_i \ge 0.$$

Задача 4. (Тренировочный вариант ЕГЭ-2010) Натуральное число n делится на 42 и имеет 42 делителя. Найдите все такие натуральные числа.

Решение. Пусть $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$ – каноническое разложение искомого числа. Количество его делителей задаётся формулой:

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_l + 1).$$

Так как число n делится на 42, то его можно записать в виде $n = 42m = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m$, из чего следует, что простые делители 2, 3 и 7 заведомо входят в его каноническое разложение. С другой стороны получим, что

$$\tau(n) = 42 = (k_1 + 2)(k_2 + 2) \times$$
$$\times (k_3 + 2)(k_4 + 1) \ldots,$$

где $k_1, k_2, k_3, \ldots$ – кратности, с которыми простые делители входят в разложение числа m. Снова получим, что число 42 разложено в произведение нескольких натуральных делителей, из которых 3, как минимум, не меньше 2. Но разложение на такие множители единственно: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Поэтому $\tau(n) = 42 = (k_1 + 2)(k_2 + 2)(k_3 + 2) = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Таким образом, получим, что возможны 6 вариантов (количество перестановок $3! = 6$) разложения, при каждом из которых значения 2, 3 или 7 принимают сомножители в разложении числа делителей $\tau(n)$. Получим, что наборы кратности (k_1, k_2, k_3) могут быть следующими:

$$(0; 1; 5),\ (0; 5; 1),\ (1; 0; 5),$$
$$(1; 5; 0),\ (5; 0; 1),\ (5; 1; 0).$$

Учитывая, что это кратности, с которым делители 2, 3, 7 входят в разложение множителя m, получим, что числа $n = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m$, обладающие указанными в условиисвойствами, могут быть равны

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^6,\ 2^1 \cdot 3^6 \cdot 7^2,\ 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^6,$$
$$2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^1,\ 2^6 \cdot 3^1 \cdot 7^2,\ 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$$

Ответ.

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^6,\ 2^1 \cdot 3^6 \cdot 7^2,\ 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^6,$$
$$2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^1,\ 2^6 \cdot 3^1 \cdot 7^2,\ 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$$

4. Делители натурального числа. Формула суммы делителей

Умение находить количество и, самое главное, вид любого делителя натурального числа, зная его каноническое разложение, позволяет находить и сумму этих делителей. Кстати, ещё древними греками было введено понятие совершенного числа – числа, равного сумме своих делителей, не включая само число.

Если число $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$, то сумма его делителей, включая и само это число, может быть найдена по формуле:

$$S(n) = \left(1 + p_1 + \ldots + p_1^{k_1}\right) \times$$
$$\times \left(1 + p_2 + \ldots + p_2^{k_2}\right) \cdot \ldots \times$$
$$\times \left(1 + p_l + \ldots + p_l^{k_l}\right) = \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1} \right).$$

Это можно доказать, перемножив скобки и убедившись, что в полученной сумме встречаются все возможные делители числа N.

Задача 5. (Тренировочный вариант ЕГЭ-2010) Найдите натуральное число N, имеющее 6 делителей, сумма которых равна 104.

Решение. По формуле количества делителей

$$\tau(N) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_l + 1) = 6 = 2 \cdot 3.$$

Следовательно, число N имеет два простых делителя и имеет вид $N = p_1 \cdot p_2^2$, сумма делителей равна $(1 + p_1)\left(1 + p_2 + p_2^2\right) = 104.$ Если бы один из делителей был равен 2, то произведение делилось или на 3, или на 7. Но так как 104 не делится ни на 3, ни на 7, то это невозможно. Следовательно, оба множителя, на которые разложено число 104, должны быть как минимум больше 3.

Рассмотрим разложение числа 104 на два множителя, большие 3. Разложения $104 = 26 \cdot 4 = 13 \cdot 8$, в которых мы учитываем последовательность множителей, зависящих от простых чисел, не дают решения задачи, т. к. в этом случае $p_1 = 25$ или $p_1 = 12$ не будут простыми числами.

$104 = 4 \cdot 26 = 8 \cdot 13$. В первом случае $p_1 = 3$, но p_2 – не существует. Во втором случае $p_1 = 7$, $p_2 = 3$. Следовательно, $N = 7 \cdot 3^2 = 63$.

Ответ. 63.

5. Деление с остатком

Формула деления одного натурального числа на другое натуральное число по сути самая используемая при решении задач. Формула деления натуральных чисел с остатком – формула начальной школы, поэтому трудно представить, что именно обращение к ней в большом количестве случаев может привести к решению.

Определение. Разделить натуральное число n на натуральное число m с остатком – это значит представить число n в виде $n = c \cdot m + r$, где c и r – целые неотрицательные числа, причём $0 \le r < m$.

Следствие. При делении натуральных чисел на натуральное число m остаток может принимать ровно m значений: $0, 1, \ldots, m-1$. В частности, условие делимости числа n на m означает, что остаток от деления равен нулю.

Задача 7. (Тренировочный вариант ЕГЭ-2011) Решите в натуральных числах уравнение

$$2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!, \ (1! = 1, l! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot l).$$

Решение. Записав уравнение в виде $2(k! + n!) = m!$, получим, что $k \le n < m$ или $n \le k < m$.

Если $k=n$, то уравнение запишется в виде $4k!=m!$, что после сокращения на меньшее произведение $k!$ даст следующее равенство: $4=(k+1)\cdot\ldots\cdot m$. Получим, что число 4 делится на $k+1$. Так как k – натуральное число, то $+1=2$ или $k+1=4$, т. е. $k=1$ или $k=3$.

В первом случае имеем $4\cdot 1!=m!$. Это уравнение решений не имеет.

Во втором случае $4\cdot 3!=m!$, т. е. $m=4$. Следовательно, тройка натуральных чисел $(3;3;4)$ – решение задачи.

Если $k\neq n$, то пусть $k<n$. Противоположный случай рассматривать не надо – достаточно заметить, что если тройка чисел (k_0,n_0,m_0) – решение, то $(n_0,\ k_0,\ m_0)$ – тоже. Получим:

$$2(k!+n!)=m!\Leftrightarrow 2k!(1+(k+1)\ldots n)=$$
$$=m!\Leftrightarrow 2(1+(k+1)\ldots n)=(k+1)\cdot\ldots\cdot m.$$

Число, стоящее в скобках в левой части уравнения, имеет вид $c\cdot(k+1)+1$, т. е. на $(k+\ )$ не делится. Но всё число, стоящее в левой части уравнения, делится на $(k+1)$. Поэтому получим, что 2 делится на $(k+\ )$. Аналогично, число, стоящее в скобках, не делится на n, а всё произведение в левой части уравнения – делится. Следовательно, 2 делится и на n. Это возможно, если только $n=k+1=2$. Но тогда $m=3$. Получим, что тройки чисел $(1;2;3)$ и $(2;1;3)$ – решения уравнения.

Ответ. $(1;2;3)$, $(2;1;3)$, $(3;3;4)$.

Часто решения задач основаны на нахождении остатков от деления квадрата числа на некоторое натуральное число или на окончании записи квадрата числа в десятичной системе счисления.

$$k^2\equiv 0{,}1(\mathrm{mod}\,3),\quad k^2\equiv 0{,}1{,}3{,}4(\mathrm{mod}\,6),$$
$$k^2\equiv 0{,}1{,}4(\mathrm{mod}\,8),\quad k\ \equiv 0{,}1(\mathrm{mod}\,4),$$
$$k^2\equiv 0{,}1{,}3{,}4(\mathrm{mod}\,6),\quad k^2\equiv 0{,}1{,}4{,}7(\mathrm{mod}\,9),$$
$$k^2\equiv 0{,}1{,}4(\mathrm{mod}\,5),\qquad \equiv 0{,}1{,}2{,}4(\mathrm{mod}\,7).$$

Также k^2 *не может* оканчиваться на 2, 3, 7, 8.

Запись $k\ \equiv p(\quad n)$ читается так: квадрат числа k сравним с числом p по модулю n, т. е. даёт остаток, равный p, при делении на n.

Задача 6. Решите уравнение $n!+4n-9=k^2$ в натуральных числах.

Решение. Слагаемое $4n$ при любом натуральном значении n делится на 4. Заметим, что начиная с $n=4$, $n!$ также делится на 4, а $-9\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Но, как видно из сказанного выше, квадрат числа не может давать остаток, равный

3, при делении на 4. Поэтому при $n \geq 4$ уравнение решений иметь не может. Осталось перебрать три оставшиеся значения.

$n=1$: $1+4-9=k^2$. Уравнение решений не имеет.

$n=2$: $2+8-9=k^2$. Уравнение имеет одно натуральное решение $k=1$.

$n=3$: $6+12-9=k^2$. Уравнение имеет одно натуральное решение $k=3$.

Ответ. $(2;\ 1)$, $(3;\ 3)$.

6. Чётность и нечётность

Простейшим случаем деления с остатком является определение чётности и нечётности натурального или целого числа. Действительно, число, делящееся на 2 – чётное, а не делящееся на 2 – нечётное. Формула чётного числа $n=2m$, а формула нечётного числа $n=2m+1$.

Задача 7. (Вариант ЕГЭ–2010) Перед каждым из чисел 6, 7, ..., 10 и 14, 15, ..., 20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все полученные 35 результатов складывают. Какую наибольшую и какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?

Решение. Каждое из чисел первого набора, взятое с выбранным знаком, будет сложено с каждым числом второго набора, перед которым также будет стоять выбранный знак. Это означает, что каждое число первого набора будет повторено в сумме такое количество раз, сколько чисел во втором наборе, а каждое число второго набора – столько раз, сколько чисел в первом наборе.

Получим, что сумма S – это одно из чисел

$$7(\pm 6 \pm 7 \pm \ldots \pm 10)+5(\pm 14 \pm 15 \pm \ldots \pm 20),$$

которое может быть получено выбором знаков. Очевидно, что максимальной сумма будет, если все слагаемые будут положительны, т. е.

$$S_{\max}=7(6+7+\ldots+10)+$$
$$+5(14+15+\ldots+20)=$$
$$=280+595=875.$$

Нахождение минимальной по модулю суммы основано на следующем: при изменении знака любого слагаемого с положительного на отрицательный максимальная сумма уменьшается на чётное число. Действительно, если k – одно из чисел и мы меняем его знак, то сумма меняется на величину $k-(-k)=2k$, а произведение чётного числа на чётное или нечётное число – чётное. Поэтому с изменением знаков слагаемых сумма будет меняться, оставаясь нечётной. Меньший модуль нечётного числа равен единице, следовательно, можно предположить, что наименьшая по модулю сумма также может равняться единице. Но это нужно доказать хотя бы подбором. Например,

$$7\cdot(6-7+8-9+10)+$$
$$+5\left(-14-15+16-17+18-19+20\right)=$$
$$=7\cdot 8+5\left(-11\right)=1.$$

Ответ. 875, 1.

7. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида

В курсе общеобразовательной школы присутствует алгоритм перевода рациональной дроби в десятичную форму, однако не присутствует обратный алгоритм перевода бесконечной периодической десятичной дроби в рациональную форму. На самом простом уровне проходятся такие понятия как наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное натуральных и целых чисел. Однако эти вопросы нашли своё отражение в вариантах ЕГЭ и диагностических работах.

Определение. Натуральное число d называется наибольшим общим делителем натуральных чисел m и n, если оба этих числа делятся на d, но не делятся одновременно ни на какое натуральное число, большее его.

Обозначение:

$$d=\text{НОД}\left(m;\ n\right)\equiv\left(m;\ n\right).$$

Запись без букв НОД используется для сокращения решений, посвящённых нахождению наибольшего общего делителя.

Теорема. Если натуральные числа m и n одновременно делятся на число d то их сумма, разность и их любая алгебраическая сумма (т. е. выражение вида $lm+kn,\ k,\ l\in Z$) также делится на d.

Алгоритм Евклида нахождения $\text{НОД}\left(m;\ n\right)$.

1. Пусть $d=\quad\left(m\ \ n\right)\equiv\left(m\ \ n\right)$ и, для простоты, $n\geq m$. Разделим большее число на меньшее с остатком: $n=c_0m+r_0$, где c_0 – неполное частное, а r – остаток.

Если $r_0=0$, то n делится на m, но и m делится на m. Поэтому, если $r_0=0$, то $\left(n;m\right)=m$.

2. Если $r\neq$ то по теореме получим, что $r_0=n-c_0m$ делится на $d=\left(n;\ m\right)$. Заметим также, что $n\geq m>r_0$.

3. Разделим m на r_0 с остатком: $m=c_1r_0+r_1$. Если $r_1=0$, то

$$\left(m;r_0\right)=\left(n;m\right)=r_0.$$

Если $r\neq$ то так как числа n, m, r делятся на d, то и r_1 делится на d. При этом $n\geq m>r_0>r_1$.

4. Снова разделим r_0 на r_1 с остатком...

Так как ненулевые остатки образуют убывающую последовательность *натуральных* чисел, то процесс их последовательного нахождения не может быть бесконечным. Либо на каком-то шаге вновь полученный остаток будет равен 0, а тогда НОД – предыдущий остаток, либо вновь полученный остаток будет равен 1. В этом случае $1=\left(n;m\right)$, и такие натуральные числа будут называться взаимно простыми числами.

Задача 8. Установите, является ли дробь $\dfrac{19043}{20413}$ сократимой, и, если является, сократите её.

Решение. Обычно для сокращения дроби применяют метод разложения числителя и знаменателя на множители. Но это хорошо только тогда, когда можно применить один или несколько стандартных признаков делимости – признаки делимости на 2, 3, 5, 9 и т. п. В данном случае это не подходит. Но сокращение дробей – это, по сути, задача на нахождение НОД числителя и знаменателя. Имеем:

$$20413 = 1 \cdot 19043 + 1370,$$
$$19043 = 13 \cdot 1370 + 1233,$$
$$1370 = 1 \cdot 1233 + 137,$$
$$1233 = 9 \cdot 137.$$

Следовательно, $(20413\,;19043) = 137$. Но, найдя НОД, надо числитель и знаменатель сократить на это число. Следовательно, надо произвести две операции деления, в каждой из которых могут быть допущены ошибки. Гораздо проще «вернуться» по схеме алгоритма и выразить каждое из чисел через НОД. Имеем:

$$1233 = 9 \cdot 137,$$
$$1370 = 9 \cdot 137 + 137 = 10 \cdot 137,$$
$$19043 = 13 \cdot 10 \cdot 137 + 9 \cdot 137 = 139 \cdot 137,$$
$$20413 = 1 \cdot 139 \cdot 137 + 10 \cdot 137 = 149 \cdot 137.$$

Окончательно получим, что
$$\frac{19043}{20431} = \frac{139 \cdot 137}{149 \cdot 137} = \frac{139}{149}.$$

Ответ. $\frac{139}{149}$.

Отметим, что примеры, связанные с возможностью разнообразных подходов, могут использоваться для развития творческих способностей учащихся на ранних стадиях обучения математике. Алгоритм Евклида и метод разложения на множители, однако, не являются единственными методами, которые можно предложить для решения подобного класса задач. Например, в одном из тренировочных вариантов, представленных разработчиками ЕГЭ в его последней версии, для решения предлагалась следующая задача.

Задача 9. Найдите несократимую дробь

$$\frac{p}{q} = \frac{1234567\overbrace{888.....8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999.....9}_{1999}87654321}.$$

Решение. Чисто арифметическое решение данной задачи основано на понятии пропорции – равенства двух отношений. Понятие пропорции используется также при решении геометрических задач (например, при решении подобных треугольников), в химии, в физике. Но понятие производной пропорции как одного из рациональных способов расчёта давно исключено из программы начального обучения математике и не входит в курс алгебры, где арифметическая составляющая минимальна.

Приведём формулировку производной пропорции. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то и $\frac{ka + lb}{na + mb} = \frac{kc + ld}{nc + md}$, каковы бы ни были числа k, l, m, n.

Опираясь на этот результат, можно очень просто решить задачу, отнесённую авторами-составителями к уровню С6, т. е. самому трудному уровню.

Проведём вычисления. Если

$$\frac{p}{q} = \frac{1234567\overbrace{888.....8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999.....9}_{1999}87654321},$$

то $\frac{q - p}{q - 10p} = \frac{\overbrace{111.....1}^{2007}\overbrace{00....0}^{8}}{\underbrace{111...1}_{2007}} = 10^8$. Отсюда получим, что

$$\left(10^9 - 1\right)p = \left(10^8 - 1\right)q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{10^8 - 1}{10^9 - 1} \Leftrightarrow \frac{p}{q} =$$

$$= \frac{99999999}{999999999} = \frac{\overbrace{11111111}^{8}}{\underbrace{111111111}_{9}}.$$

Ответ. $\dfrac{p}{q} = \dfrac{\overbrace{11111111}^{8}}{\underbrace{111111111}_{9}}.$

Вообще задачи на нахождение НОД числовых выражений могут иметь и другие формы.

Задача 10. Найдите все натуральные n такие, что дробь сократима.

1) $\dfrac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}.$

2) $\dfrac{5n^3 + 2n^2 - 4n + 2}{5n + 7}.$

3) $\dfrac{7n^2 + 11n + 4}{6n^2 + 5n}.$

Задача может иметь почти равносильную формулировку: найдите все натуральные числа, на которые может быть сократима дробь.

Решение. Все три варианта задачи имеют отличия, на которых необходимо остановиться, чтобы получить полную картину решения.

Пусть n – натуральное число, при котором дробь может быть сокращена.

1) Разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$3n^3 - 8n^2 + 14n - 8 =$$
$$= \left(n^2 - n + 3\right)(3n - 5) + 7.$$

Остаток от деления – число. Следовательно,

$$\left(3n^3 - 8n^2 + 14n - 8; 3n - 5\right) =$$
$$= (3n - 5; 7) = d.$$

Но так как 7 делится только на 7 или на 1, то НОД может быть равен либо 7, либо 1. Если он равен 1, то при всех натуральных значениях n дробь будет несократима. Если он равен 7, то надо найти все натуральные n, при которых $3n - 5$, а следовательно, и $3n^3 - 8n^2 + 14n - 8$ делятся на 7. Имеем: $3n - 5 = 7k \Leftrightarrow \Leftrightarrow n = \dfrac{7k + 5}{3} \Leftrightarrow n = 2k + 1 + \dfrac{k + 2}{3}$. Отсюда следует, что если $k = 3t + 1$, то дробь – целое число. Следовательно,

$$n = \frac{7(3t + 1) + 5}{3} = 7t + 4, \;\; t = 0, \; 1, \; 2...$$

Ответ. Дробь сократима, если $n = 7t + 4$, $t = 0, 1, 2...$ Дробь сократима на 7.

2. Так как неполное частное никак не влияет на величину наибольшего общего делителя, то процесс его нахождения может быть закончен в любой удобный момент.

Разделим числитель второй дроби на знаменатель:

$$5n^3 + 2n^2 - 4n + 2 =$$
$$= \left(n^2 - n\right)(5n + 7) + (3n + 2).$$

Процесс деления, по сути, до конца не доведён, но это никак не влияет на результат. Просто удобнее искать НОД целых выражений. Имеем:

$$\left(5n^3 + 2n^2 - 4n + 2; \; 5n + 7\right) =$$

$$=(5n+7;\ 3n+2)=$$
$$=(3n+2;\ 2n+5)=$$
$$=(2n+5;\ n-3)=(n-3;\ 11).$$

Так как 11 делится на 11 и на 1, то дробь либо несократима, либо сократима на 11. Поиск значений n, при которых дробь сократима, в этом случае тривиален:

$$n-3=11t \Leftrightarrow n=11t+3,\ t=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Ответ. Дробь сократима при $n=11t+3$; дробь сократима на 11.

3. В третьем случае полезно разложить числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{7n^2+11n+4}{6n^2+5n}=\frac{(n+1)(7n+4)}{n(6n+5)}.$$

Очевидно, что

$$(n+1;n)=(n;1)=1 \text{ и}$$
$$(6n+5;\ n+1)=(n+1;\ n)=1.$$

Так что дробь может быть сократима на НОД $(7n+4;n)=(n;4)=2;4,$ или на НОД

$$(7n+4;\ 6n+5)=$$
$$=(6n+5;\ n-1)=(n-1;\ 11).$$

Ответ. При $n=2k,\ k=1,\ 2,\ldots$ дробь сократима на 2; при $n=4k,\ k=1,\ 2,\ldots$ дробь сократима на 4; при $n=11k+1$ при $k=1,\ 2,\ldots$ дробь сократима на 11.

Задача 11. Натуральные числа $m,\ n$ таковы, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима, а дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}$ сократима. На какие натуральные числа она сокращается?

Заметим, что подобная задача была предложена в олимпиаде «Покори Воробьёвы горы – 2011».

Решение. Первое условие – о несократимости дроби $\frac{m}{n}$ означает, что $(m;n)=1$. Найдём $(5m-3n;2m+5n)$. Имеем:

$$(5m-3n;\ 2m+5n)=$$
$$=(2m+5n;\ m-13n)=$$
$$=(m-13n;\ 31n),$$

или:

$$(\ \ m-\ \ n\quad m+\ \ n)=$$
$$=(\ \ m-\ \ n\qquad m-n)=$$
$$=(12m-n;\ 31m).$$

Следовательно, если дробь сократима, то

$$(5m-3n;\ 2m+5n)=(31n;\ 31m)=31,$$

т. к. $(m;n)=1$. Осталось указать значения взаимно простых натуральных чисел m и n (хотя бы одну пару), при которых дробь сократима на 31. Это будет выполнено, например, при $m=23,\ n=28$. При этих значениях дробь будет равна

$$\frac{5m-3n}{2m+5n}=\frac{5\cdot 23-3\cdot 28}{2\cdot 23+5\cdot 28}=\frac{31}{186}=\frac{1}{6}.$$

Ответ. Дробь сократима на 31.

Литература

1. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ-2010: Математика. Общая редакция: А.Л.Семенов, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2010.

2. *Власова А.П., Евсеева Н.В., Латанова Н.И. и др.* Математика: 50 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. – М.: АСТ: Астрель, 2010.

3. *Мирошин В.В., Рязановский А.Р.* Математика. Решение задач повышенной сложности. – М.: «Интеллект-Центр», 2007.

4. *Мирошин В.В.* Решение задач с параметрами. Теория и практика. – М.: Издательство «Экзамен», 2009.