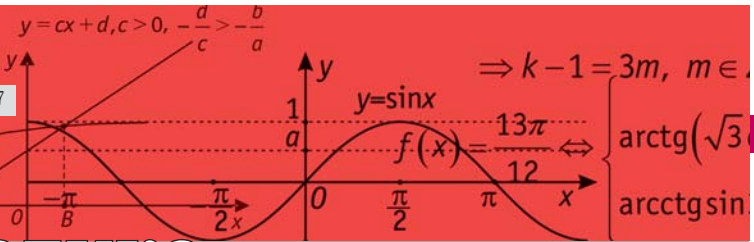


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Математика



Мирошин Владимир Васильевич

Учитель гимназии № 1522 г. Москва, старший преподаватель кафедры математического анализа Московского городского педагогического университета, закончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, почётный работник образования, 25 лет работает в школе. Автор пособий по подготовке к ЕГЭ по математике.



Задачи о касательных к параболам

Казалось бы, квадратный трёхчлен и график квадратичной функции – парабола – изучены вдоль и поперёк. И ничего нового уже не ожидается. Однако время от времени эта старая избитая тема преподносит новые сюрпризы.

В 1999 г. в Московском инженерно-физическом институте (МИФИ) на вступительных экзаменах была предложена следующая задача.

Задача 1. Точки касания двух общих касательных к параболам

$$y = -x^2 + 5x + 1 \text{ и } y = x^2 + bx + c$$

(b и c – действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наименьшее значение параметра c , при котором площадь четырёхугольника равна 8.

Необходимая теория.

Рассмотрим две параболы, заданные уравнениями $y = x^2 + px + q$ и $y = -x^2 + p_1x + q_1$. Составим уравнения общих касательных.

Пусть абсциссы точек касания соответственно x_0 и x_1 ($x_1 > x_0$ для определённости).

Прямая $y = kx + b$, по одному из возможных здесь определений, является касательной к параболе

$$y = x^2 + px + q,$$

если их графики имеют только одну общую точку. Другими словами, система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + px + q, \\ y = kx + b \end{cases}$$

должна иметь ровно одно решение. Таким образом, дискриминант квадратного уравнения $kx + b = x^2 + px + q$ равен нулю, и его единственным корнем является число $x = x_0$. Следовательно, $(p - k)^2 = 4(q - b)$ и, так как

$$kx_0 + b = x_0^2 + px_0 + q, \text{ то}$$

$$(p - k)^2 = -4(p - k)x_0 - 4x_0^2.$$

Итак, $(p - k)^2 + 4(p - k)x_0 + 4x_0^2 = 0$, т.е. $(p - k + 2x_0)^2 = 0$, $k = 2x_0 + p$.

Для нахождения b имеем

$$\begin{aligned} b &= x_0^2 + px_0 + q - kx_0 = \\ &= x_0^2 + px_0 + q - 2x_0^2 - px_0 = -x_0^2 + q. \end{aligned}$$

Окончательно уравнение касательной к первой параболе будет иметь вид $y = (2x_0 + p)x - x_0^2 + q$, а ко второй параболе соответственно

$$y = (-2x_1 + p_1)x + x_1^2 + q_1.$$

Так как это уравнения одной прямой общей касательной, то получаем систему уравнений, связывающих абсциссы её точек касания:

$$\begin{cases} 2x_0 + p = -2x_1 + p_1, \\ -x_0^2 + q = x_1^2 + q_1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p), \\ x_0^2 + x_1^2 = q - q_1. \end{cases}$$

Так как полученная система симметрична, то если какая-либо пара чисел $(x_0; x_1)$ является её решением, то пара чисел $(x_1; x_0)$ – тоже.

Таким образом, если к параболом проведены общие касательные, то абсциссы точек касания совпадают.

Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ (рис. 1), полученный последовательным соединением точек касания, как минимум, – трапеция. Основаниями трапеции являются отрезки, параллельные оси ординат, длины которых равны модулям разности ординат точек касания, а высота трапеции h – модулю разности абсцисс точек касания. Имеем:

$$AD = 2x_0^2 - (p_1 - p)x_0 + q - q_1;$$

$$BC = 2x_1^2 - (p_1 - p)x_1 + q - q_1.$$

Используя условия

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = \frac{1}{2}(p_1 - p), \\ x_0^2 + x_1^2 = q - q_1, \end{cases}$$

получим, что

$$h = |x_1 - x_0| = \sqrt{2(q - q_1) - \left(\frac{p_1 - p}{2}\right)^2}.$$

Теперь вычислим площадь трапе-

ции $ABCD$:

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot |x_1 - x_0| = \left(2(q - q_1) - \frac{(p - p_1)^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

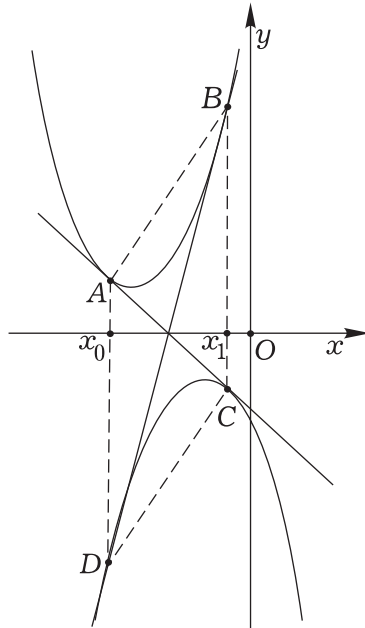


Рис. 1

Решение. Получив формулу, выражающую площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания, можно ответить на вопрос, поставленный в задаче 1.

Подставляя соответствующие значения в полученную формулу, имеем:

$$S = \left(2(c - 1) - \left(\frac{b - 5}{2}\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} = 8.$$

Откуда:

$$2(c - 1) = 4 + \left(\frac{b - 5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow c = 3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b - 5}{2}\right)^2.$$

Наименьшее значение параметра c , при котором площадь фигуры равна 8, это $c = 3$.

Ответ: 3.

Выясним, может ли трапеция $ABCD$ быть равнобедренной, а если может, то когда.

Для её равнобедренности достаточно, чтобы разности ординат соответственно точек B и A , C и D были равны. Получим:

$$(x_1^2 + px_1 + q) - (x_0^2 + px_0 + q) = (-x_0^2 + p_1x_0 + q_1) - (-x_1^2 + p_1x_1 + q_1).$$

После простейших преобразований получим, что $p = -p_1$. Но это будет означать, что абсциссы вершин парабол одинаковы. В этом случае, как легко видеть, трапеция превращается в прямоугольник $ADCD$.

Следующая задача предлагалась на XIV-й заочной физико-математической олимпиаде МФТИ.

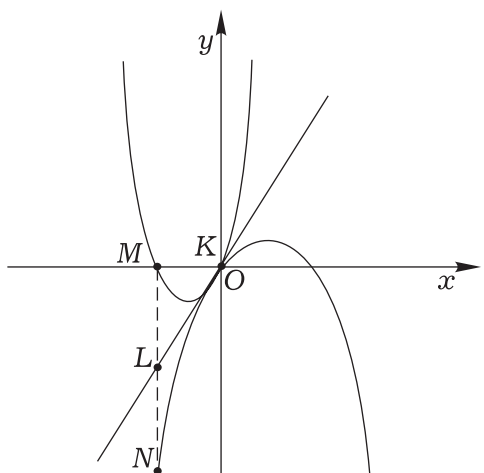
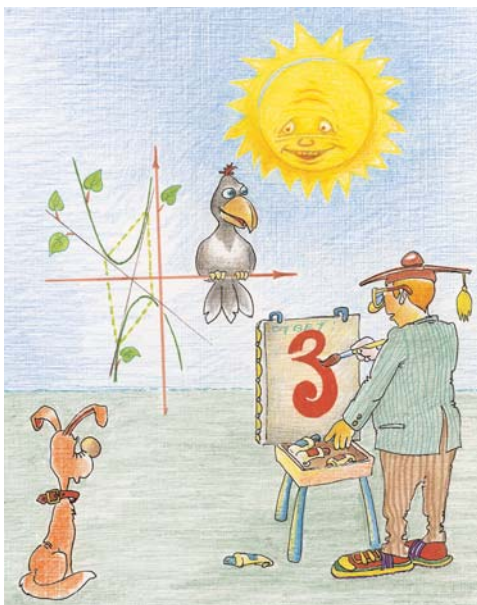


Рис. 2

Задача 2 (МФТИ–2004). Параболы, заданные уравнениями

$$y = 2004x^2 + ax + b \text{ и } y = -x^2 + cx + d,$$

касаются в точке K . Прямая, параллельная оси Ox , пересекает первую параболу в точках K и M , а прямая, параллельная оси Oy , пересекает параболы в точках M и N . В каком отношении делит отрезок MN общая касательная к параболом?



Решение. Так как при параллельном переносе отношения отрезков не меняется, то, не изменяя общности рассуждений, можно считать, что точка K не только точка касания, но и начало координат. Тогда уравнения парабол запишутся в виде

$$y = 2004x^2 + ax \text{ и } y = -x^2 + cx.$$

Точка M в этом случае – вторая точка пересечения первой параболы с осью Ox (рис. 2).

Как и прежде, рассмотрим сначала общее решение этой задачи. Пусть уравнения парабол, проходящих через начало координат, соответственно

$$y = px^2 + ax \text{ и } y = -qx^2 + cx,$$

где $p > 0, q > 0$. Но так как они касаются в начале координат, уравнение их общей касательной имеет вид $y = ax = cx$, откуда следует, что $a = c$, причём $a > 0$. Таким образом, уравнения парабол

$$y = px^2 + ax, y = -qx^2 + ax.$$

Абсцисса точки M равна в таком случае $-\frac{a}{p}$, ордината точки N , соот-



ветственно, $-q \frac{a^2}{p^2} - \frac{a^2}{p}$, модулю которой будет равна длина отрезка MN , т. е.

$$MN = q \frac{a^2}{p^2} + \frac{a^2}{p}, \text{ кроме того, } ML = \frac{a^2}{p},$$

$$LN = \frac{q^2 a^2 + a^2 p}{p^2} - \frac{a^2}{p} = \frac{q^2 a^2}{p^2}.$$

Искомое отношение:

$$\frac{ML}{LN} = \frac{a^2}{p} : \frac{q^2 a^2}{p^2} = \frac{p}{q^2}.$$

В частности, если $p=2004$, $q=1$, то получим, что $\frac{ML}{LN} = \frac{p}{q^2} = \frac{2004}{1}$.

Ответ: 2004: 1.

Задача 3. Из некоторой точки M проведены две касательные MA и MB к параболе $y = x^2$ (рис. 3). Касательная к параболе, параллельная хорде AB , пересекает две первые касательные в точках C и D соответственно. Найдите отношение периметров треугольников $MAВ$ и MCD .

Решение. Пусть точки A и B имеют, соответственно, координаты $(a; a^2)$, $(b; b^2)$. Тогда уравнения касательных AM и BM , будут иметь вид:

$$y = 2ax - a^2 \text{ и } y = 2bx - b^2.$$

Находя их пересечение, определяем координаты $(x; y)$ точки M :

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2 \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2},$$

$$y = 2a \frac{a+b}{2} - a^2 = ab.$$

Угловой коэффициент хорды AB

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b.$$

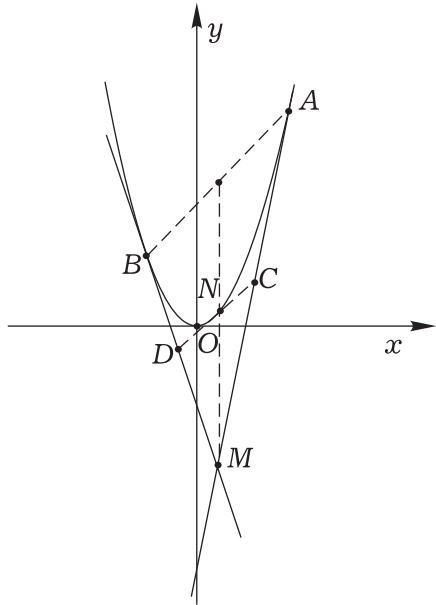


Рис. 3

Уравнение касательной CD имеет вид $y = (2x_0)x - x_0^2$ (см. задачу 1), где x_0 — абсцисса точки касания. Так как касательная CD параллельна этой хорде, то $2x_0 = a + b$; следовательно, $x_0 = \frac{a+b}{2}$, а ордината точки касания

$$y_0 = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Наконец, середина хорды AB имеет координаты $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a^2+b^2}{2}\right)$.

Итак, точка M , точка касания прямой CD с параболой и, наконец, середина хорды AB лежат на одной прямой, параллельной оси параболы!

Мало того, точка касания прямой CD – середина медианы треугольника AMB .

Таким образом, треугольники AMB и CMD подобны с коэффициентом $k=2$.

Следовательно, периметр треугольника AMB в два раза больше периметра треугольника CMD !

Ответ: 2:1.

Задача 4 (Московский автомобильный институт). Найдите наименьшее расстояние d между точками, одна из которых принадлежит графику функции $y=2x^2+\frac{x}{2}+3$, а другая – графику функции $y=\sqrt{x}$.

Решение. Наименьшее расстояние между графиками данных функций равно расстоянию между точками $A(x_0; \sqrt{x_0})$ и $B(x_1; 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3)$, для которых (рис. 4) прямая AB перпендикулярна касательным, проведённым к графикам в указанных точках.

Уравнения касательных таковы:

$$y = (4x_1 + \frac{1}{2})(x - x_1) + 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3,$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \sqrt{x_0}.$$

Первое из них мы научились находить при решении задачи 1, а второе можно получить из аналогичных соображений (подумайте, как?). Отметим, что указанные уравнения ка-

сательных легко получаются также и из общего уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(a; f(a))$, которое имеет вид

$$y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

где $f'(a)$ обозначает значение производной в точке $x=a$.

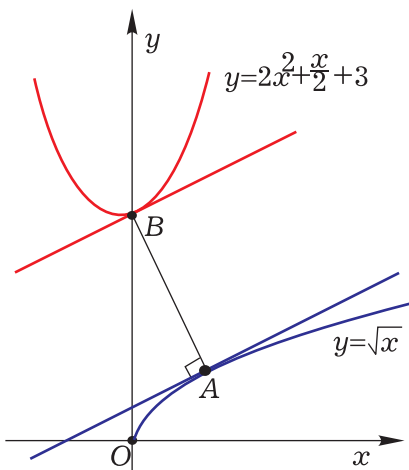


Рис. 4

Так как касательные должны быть параллельны, то, приравнивая коэффициенты при x в их уравнениях, получаем, что $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 4x_1 + \frac{1}{2}$.

Чтобы прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ были перпендикулярны, нужно, чтобы $k_1k_2=-1$. Действительно, угол между данными прямыми равен углу между прямыми $y=k_1x$ и $y=k_2x$. А условие перпендикулярности этих прямых (см. рис 5) следует из того, что $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ и

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке A , является прямой

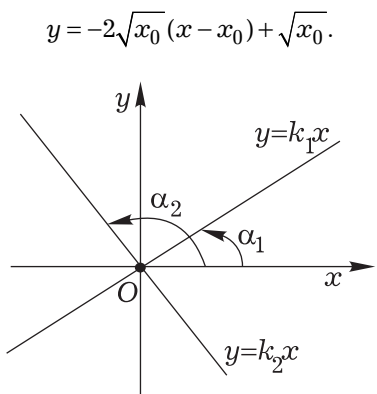


Рис. 5

Так как эта прямая должна проходить через точку B , то

$$y = -2\sqrt{x_0}(x_1 - x_0) + \sqrt{x_0} = 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3.$$

Итак, абсциссы точек A и B удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} -2\sqrt{x_0} \cdot (x_1 - x_0) + \sqrt{x_0} = 2x_1^2 + \frac{x_1}{2} + 3, \\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = 4x_1 + \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{x_0} \cdot (x_1 - x_0) + \sqrt{x_0} = \\ = \frac{1}{8} \left(4x_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{95}{32}, \\ 4x_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{x_0} + 2(\sqrt{x_0})^3 + \sqrt{x_0} = \\ &= -\frac{1}{32(\sqrt{x_0})^2} + \frac{95}{32}. \end{aligned}$$

Преобразуя это уравнение, получим:

$$64(\sqrt{x_0})^5 + 40(\sqrt{x_0})^3 - 103(\sqrt{x_0})^2 - 1 = 0.$$

Уравнение

$$64t^5 + 40t^3 - 103t^2 - 1 = 0, \quad t = \sqrt{x_0} \geq 0,$$

имеет корень $t = 1$, т.к. сумма его коэффициентов равна 0. Кроме того, разложив на множители или выпол-

нив, например, деление «уголком», уравнение можно записать в виде

$$(t - 1)(64t^4 + 64t^3 + 104t^2 + t + 1) = 0,$$

которое положительных корней, отличных от 1, ясно, не имеет.

Поэтому $x_0 = 1, x_1 = 0$. Таким образом, точка A имеет координаты $(1; 1)$, а точка $B - (0; 3)$. Расстояние между ними равно $\sqrt{1^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$.

Задача 5. (МФТИ, 2001-2002 г.)

Хорда AB параболы $y = x^2$ перпендикулярна касательной к параболе, проходящей через точку A . Какую наименьшую длину может иметь отрезок AB ?

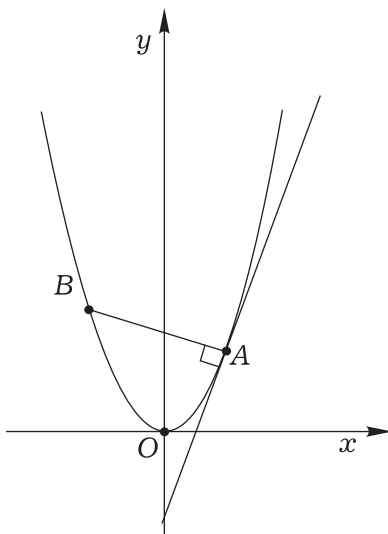


Рис. 6

Решение. Не меняя общности, будем считать, что точка $A(a; a^2)$ лежит справа от оси ординат, т.е. пусть $a > 0$. Уравнение касательной, проходящей через точку A , имеет вид $y = 2ax - a^2$, а перпендикулярной к ней прямой $y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$. Решим уравнение:

$$x^2 = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2a}x - (a^2 + \frac{1}{2}) = 0.$$

Учитывая, что первый корень уравнения $x = a$, получаем его второй корень

$$x = -\frac{1}{a}\left(a^2 + \frac{1}{2}\right) = -\left(a + \frac{1}{2a}\right).$$



Воспользуемся ещё и тем, что если расстояние принимает наименьшее значение, то его квадрат также минимален. Имеем

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(2a + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 - a^2\right)^2 = \\ &= \left(2a + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right)^2 = \\ &= \left(2a + \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a^2}\left(2a + \frac{1}{2a}\right)^2 = \\ &= \left(2a + \frac{1}{2a}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4a^2}\right) = \frac{1}{2a}\left(2a + \frac{1}{2a}\right)^3. \end{aligned}$$

Обозначим $t = \frac{1}{2a}$. Тогда

$$d^2 = D(t) = t\left(t + \frac{1}{t}\right)^3 =$$

$$= t(t^3 + 3t^2 \cdot \frac{1}{t} + 3t \cdot \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3}) =$$

$$= t^4 + 3t^2 + 3 + \frac{1}{t^2} =$$

$$= \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4t^2 + \frac{1}{t^2}\right) + \frac{11}{4}.$$

Функции

$$y = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ и } y = 4t^2 + \frac{1}{t^2}$$

достигают своего наименьшего значения при $t^2 = \frac{1}{2}$. Для первой из них это очевидно, а для второй следует из неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ о среднем арифметическом и среднем геометрическом положительных чисел, в котором равенство достигается только в том случае, когда $a = b$.

Таким образом, $t^2 = \frac{1}{2}$ и, тем самым, $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отметим, что если применить производную, то тот же результат следует из того, что

$$\begin{aligned} D'(t) &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^3 + 3t\left(t + \frac{1}{t}\right)^2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = \\ &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2\left(t + \frac{1}{t} + 3t - \frac{3}{t}\right) = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2\left(4t - \frac{2}{t}\right). \end{aligned}$$

Квадрат минимального расстояния

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \\ &= 2 \cdot \frac{27}{8} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

и, следовательно, минимальная длина хорды AB равна $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Точки касания двух общих касательных к параболам

$$y = x^2 + bx + 3 \text{ и } y = -x^2 + 2x + c$$

(b и c — действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наибольшее значение параметра c , при котором площадь четырёхугольника равна 27.

Задача 2. Точки касания двух общих касательных к параболам

$$y = -x^2 + bx - 1 \text{ и } y = x^2 + 4x + c$$

(b и c — действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наименьшее значение параметра c , при котором площадь этого четырёхугольника равна 1.

Задача 3. Точки касания двух общих касательных к параболам

$$y = x^2 + bx - 4 \text{ и } y = -x^2 + bx + c$$

(b и c — действительные параметры) являются вершинами четырёхугольника. Найдите наибольшее значение параметра c , при котором площадь четырёхугольника равна 64.

Задача 4. Даны параболы, задан-

ные уравнениями

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2 \text{ и } y = -x^2.$$

К ним проведены две общие касательные AC и BD .

Найдите:

1. значение параметра a , при котором площадь четырёхугольника $ABCD$ будет наименьшей;

2. наименьшую площадь четырёхугольника $ABCD$;

3. значение параметра a , при котором вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

4. площадь четырёхугольника $ABCD$, если вокруг него можно описать окружность.

5. периметр четырёхугольника $ABCD$, если вокруг него можно описать окружность.

6. угол между касательными, если вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Ответы:

1. $a = -\frac{1}{2}$ 2. $\frac{7}{8}\sqrt{7}$ 3. $a = 0$ 4. $2\sqrt{2}$

5. $4 + 2\sqrt{2}$ 6. $\arctg \sqrt{2}$.