О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ИЗ ЗАДАЧ С6

В.В.Мирошин,
гимназия № 1522 (Москва)
e-mail: vmiroshin@gmail.com

Заметка посвящена решению одной из задач С6, предлагаемой на ЕГЭ-2010 из сборника: Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ-2010 : Математика / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М. : АСТ : Астрель, 2010. Она будет полезна учителям и учащимся, готовящим и готовящимся к выпускному экзамену.

Ключевые слова: подготовка к ЕГЭ, задача группы С, решение уравнений в целых числах.

Решение последних задач группы С из вариантов ЕГЭ по математике всегда вызывает трудности, связанные в том числе их высокой «стоимостью». Учащиеся, знающие подходы к решению самых «дорогих» задач, получают преимущество перед остальными. Рассмотрим одну такую задачу.

Задача. Все правильные несократимые дроби, числители и знаменатели которых двузначные положительные числа, упорядочили по возрастанию. Между какими двумя последовательными дробями оказалось число $\frac{5}{8}$?

Р е ш е н и е. Вопрос о том, как можно упорядочить правильные дроби с указанными числителями и знаменателями, оказывается совершенно не важным. Действительно, пусть дроби упорядочили и $\frac{m}{n} < \frac{5}{8} < \frac{k}{l}$. Главное в этом, что разность между $\frac{5}{8}$ и указанными дробями – наименьшая из возможных разностей между этим числом и дробями последовательности. (Кстати, последовательность называется последовательностью Фарея.)

Рассмотрим эти разности:

$$\Delta_1 = \frac{5}{8} - \frac{m}{n} = \frac{5n - 8m}{8n} > 0,$$

$$\Delta_2 = \frac{k}{l} - \frac{5}{8} = \frac{8k - 5l}{8l} > 0.$$

Так как речь идет о нахождении натуральных чисел m, n, k, l, то очевидно, что числители и знаменатели дробей – положительные числа. Но разности должны быть наименьшими, и поэтому получим:

$$\begin{cases} 5n - 8m = 1 \\ 10 \le n \le 99, \end{cases} \quad \begin{cases} 8k - 5l = 1 \\ 10 \le l \le 99. \end{cases}$$

Действительно, дробь будет принимать наименьшее значение, если ее числитель принимает наименьшее возможное значение, а знаменатель – наибольшее. Следовательно, числа n и l должны быть как можно больше, оставаясь при этом двузначными, чтобы отвечать условию задачи.

Сформулируем утверждения из теории чисел, необходимые для дальнейшего решения.

Теорема 1. Пусть a, b, c – целые числа и ищутся целочисленные решения $(x; y)$ уравнения $ax + by = c$. Тогда если число c не делится на НОД (a, b), то уравнение решений не имеет.

Теорема 2. Если $(x_0; y_0)$ – какое-либо целочисленное решение уравнения $ax + by = c$, то любые числа вида

$$\begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at, \end{cases}$$

где t – произвольное целое число, также являются решениями данного уравнения.

Для нахождения какого-либо решения уравнения $ax + by = c$ достаточно выразить одну переменную через другую и потребовать, чтобы числитель получившейся дроби делился на постоянный (!) знаменатель. Другими словами, решение надо как-то подобрать.

Вернемся к нашей задаче. НОД $(5, 8) = 1$, поэтому оба составленные нами уравнения будут иметь решения. Решим первое уравнение.

$$5n - 8m = 1 \Leftrightarrow n = \frac{8m+1}{5} = m + \frac{3m+1}{5}.$$

Чтобы число n было целым, достаточно взять, например, $m = 3$. Тогда $n = 5$. Все целочисленные решения уравнения запишутся в виде

$$\begin{cases} n = 5 + 8t \\ m = 3 + 5t. \end{cases}$$

Наибольшее двузначное число n получится при $t = 11$. Имеем: $n = 93$, $m = 58$. Таким образом, $\frac{58}{93} < \frac{5}{8}$.

Аналогично найдем вторую дробь.

$$8k - 5l = 1 \Leftrightarrow l = \frac{8k-1}{5} = k + \frac{3k-1}{5}.$$

Так как l должно быть целым, то $3k - 1$ должно делиться на 5, что происходит, например, при $k = 2$. Тогда $l = 3$. Все решения уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} k = 2 + 5t \\ l = 3 + 8t. \end{cases}$$

Наибольшее двузначное число l получится при $t = 12$. Имеем: $l = 99$, $k = 62$. Итак, $\frac{5}{8} < \frac{62}{99}$.

Ответ: $\frac{58}{93} < \frac{5}{8} < \frac{62}{99}$.