Мирошин Владимир Васильевич
Учитель гимназии № 1522 г. Москва, старший преподаватель кафедры математического анализа Московского городского педагогического университета, закончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Почётный работник образования, 25 лет работает в школе. Автор пособий по подготовке к ЕГЭ по математике.

Об одном случае расположения сферы и пирамиды

Среди множества различных случаев расположения сферы и пирамиды в статье рассмотрен только один случай – тот, когда сфера касается боковых граней пирамиды в точках, лежащих на рёбрах основания. Задача, послужившая прототипом множества подобных задач (более трудоёмких), появилась в 1995 году на письменном вступительном экзамене по математике на механико-математическом факультете МГУ.

Задача 1 (МГУ, 1995). Высота пирамиды равна 5, а её основанием служит треугольник со сторонами 7, 8, 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.

Решение. Обозначим центр сферы через O и рассмотрим пирамиду $OABC$, «пристроенную» к исходной пирамиде (рис. 1).

1. Стороны треугольника ABC касаются сферы. Следовательно, сечение сферы плоскостью ABC есть окружность, вписанная в треугольник основания.

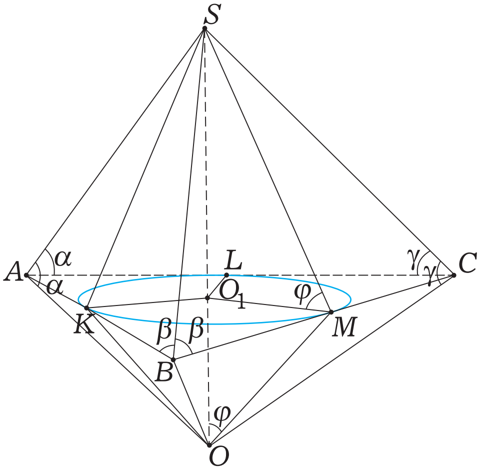

Рис. 1

2. Радиусы сферы OK, OL, OM, проведённые в точки касания, играют в пирамиде $OABC$ роль апофем (высот соответственных боковых граней). Так как они равны, то боковые грани пирамиды $OABC$ одинаково наклонены к плоскости основания и, таким образом, высота пирамиды $OABC$, совпадающая с отрезком перпендикуляра, проведённого из центра сферы на секущую плоскость, попадает

опять-таки в центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Двугранные углы, образованные боковыми гранями OAB, OAC, OBC с плоскостью ABC, одинаковы.

3. Сфера касается не только сторон основания, но и боковых граней пирамиды $SABC$ и в тех же точках. Поэтому, по признаку перпендикулярности плоскостей получим, что грани двух пирамид, имеющих общее ребро, также перпендикулярны: $OAB \perp SAB$, $OAC \perp SAC$, $OBC \perp SBC$.

4. Тогда (именно в этом состоит изюминка!) и боковые грани пирамиды $SABC$ также одинаково наклонены к плоскости основания. Следовательно, высота SO_1 пирамиды $SABC$ также попадёт в центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Таким образом, при указанном расположении сферы и пирамиды центр сферы, вершина пирамиды и центр окружности, вписанной в основание пирамиды, лежат на перпендикуляре SO к плоскости ABC.

Кроме того, указанный перпендикуляр, радиус сферы и апофема боковой грани пирамиды – стороны прямоугольного треугольника SMO, в котором высотой, проведённой к гипотенузе, служит радиус окружности, вписанной в основание; тем самым, $\angle O_1OM = \varphi$.

Теперь можно перейти к вычислениям. Обозначим угол наклона боковых граней пирамиды $SABC$ к плоскости основания через φ. Величину радиуса окружности, вписанной в треугольник, найдём, используя формулу $r = \dfrac{S}{p}$, где S – площадь основания пирамиды, а p – полупериметр основания. Тогда

$S = \sqrt{12\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = 12\sqrt{5}$, $p = 12$ и $r = \sqrt{5}$.

Из треугольника SO_1M находим, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{SO_1}{O_1M} = \sqrt{5}$, $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$, а из треугольника OO_1M получаем, что

$$R = \frac{O_1M}{\sin\varphi} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $\sqrt{6}$ (минимум вычислений при максимуме идей!).

Задача, видимо, так понравилась, что уже через 3 года она была повторена, однако в гораздо более сложном варианте.

Задача 2 (МГУ, 1998). Дана пирамида $SABC$. Сфера касается граней SAB, SAC, SBC в точках K, L, M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB, точка L – на стороне AC, точка M – на стороне BC. Известно, что радиус сферы равен 3, $\angle ASB = 90^\circ$, $\angle BSC = 105^\circ$, $\angle ASC = 75^\circ$. Найдите объём пирамиды.

Решение.

1. Условие задачи, в основной части относящейся к расположению пирамиды и сферы, повторяет условие предыдущей задачи. Поэтому (как было показано в её решении) расположение вершины пирамиды, центра вписанной окружности и центра сферы такое же, как и в предыдущей задаче, а боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плос-

кости её основания ABC. Обозначим этот угол через φ (рис. 1). В данной задаче именно этот факт играет определяющую роль, например,

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cos\varphi.$$

2. Треугольники SKB и SMB равны, так как они оба прямоугольные и $BK = BM$ как отрезки общих касательных к окружности. Поэтому $\angle SBK = \angle SBM = \beta$; аналогично, $\angle SAC = \angle SAB = \alpha$, $\angle SCA = \angle SCB = \gamma$.

Рассматривая суммы углов боковых граней пирамиды, имеем:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ, \\ \beta + \gamma + 105^\circ = 180^\circ, \\ \alpha + \gamma + 75^\circ = 180^\circ. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получаем, что $\alpha + \beta + \gamma = 135^\circ$, откуда $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

3. Обозначим апофему боковой грани пирамиды h, а угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания через φ. Тогда (проверьте эти формулы самостоятельно!)

$$h = R\,\mathrm{tg}\,\varphi, \quad H = h\sin\varphi = R\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi,$$

$$p = h\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\right) =$$
$$= R\,\mathrm{tg}\,\varphi\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\right).$$

$$S_{\text{бок}} = ph = R^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\right),$$

$$S_{\text{осн}} = S_{\text{бок}} \cos\varphi =$$
$$= R^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi\cos\varphi\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\right),$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H =$$
$$= \frac{1}{3} R^3\,\mathrm{tg}^3\,\varphi\cos\varphi\sin\varphi\left(\begin{matrix}\mathrm{ctg}\,\alpha + \\ +\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\end{matrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} R^3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi\sin^2\varphi\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\right) =$$
$$= \frac{1}{3} R^3 \left(\frac{1 - \cos^2\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 \left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\right).$$

Таким образом, всё сводится к нахождению косинуса угла наклона φ боковой грани к основанию пирамиды.

4. Сначала найдём косинус какого-нибудь угла треугольника ABC. Имеем:

$$AB = h\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta\right) = h\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$BC = h\left(\mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma\right) = h(\sqrt{3} + 1),$$

$$AC = h\left(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\gamma\right) = h\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right).$$

По теореме косинусов имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Подставляя, получим:

$$\frac{16}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 -$$
$$- \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 \cos C.$$

Вычисляя, имеем:

$$\cos C = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 2\left(2 - \sqrt{3}\right) =$$
$$= 4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2.$$

5. Теперь, наконец, можно определить косинус двугранного угла при основании пирамиды. Воспользуемся теоремой косинусов для трёхгранного угла (см. приложение). Отметим, что изучение тригонометрии трёхгранного угла не входит в курс общеобразовательной программы школы. Однако последняя задача из вступительного экзамена на мехмате МГУ подразумевает, что учащиеся искренне интересуются математикой. Имеем

$$\cos\gamma = \cos\gamma\cos C + \sin\gamma\sin C\cos\varphi.$$

А так как $\gamma = \frac{\pi}{4}$, то

$$\cos\varphi = \frac{1 - \cos C}{\sin C} = \mathrm{tg}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1 - 4 + 2\sqrt{3}}{1 + 4 - 2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{3} - 3}{13}}.$$

Осталось сделать подстановку.

$$V=\frac{1}{3}\cdot 27\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1-\left(\sqrt{\frac{4\sqrt{3}-3}{13}}\right)^2}{\sqrt{\frac{4\sqrt{3}-3}{13}}}\right)^2=$$

$$=9\cdot\frac{\left(4+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\frac{16-4\sqrt{3}}{13}}{\sqrt{\frac{4\sqrt{3}-3}{13}}}\right)^2=$$

$$=9\cdot\frac{\left(4+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\cdot\frac{16\left(4-\sqrt{3}\right)^2}{13\sqrt{3}\left(4-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=48\cdot\frac{\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}=48.$$

Простота ответа – награда за страдание!

Ответ: 48.

И, наконец, совсем свежая задача, предлагавшаяся на вступительном экзамене в МФТИ в 2005 году.

Задача 3. Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA (рис. 2). Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{5}$, $AB=6$, $SA=5$, $SB=7$, $SC=2\sqrt{10}$. Найдите длины рёбер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

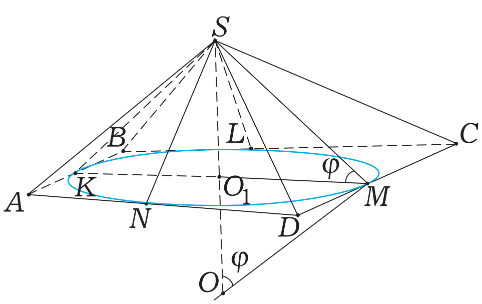

Рис. 2

Решение. Используем результаты двух предыдущих задач. При указанном расположении сферы пирамиды:

1) в основание пирамиды можно вписать окружность, следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – описанный около окружности;

2) все апофемы равны, боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды;

3) центр сферы O, центр вписанной окружности O_1 и вершина пирамиды S расположены на одном перпендикуляре SO к плоскости основания пирамиды $SABCD$.

1. Найдём радиус сферы. Так как в треугольнике ASB известны длины всех сторон 5, 6, 7, то, по формуле Герона для треугольника, его площадь равна $S=\sqrt{9\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=6\sqrt{6}$.

Длина апофемы, таким образом, равна

$$h=SK=\frac{2S}{AB}=\frac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}.$$

Найдём радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCD$:

$$r=\sqrt{h^2-H^2}=\sqrt{24-20}=2.$$

Из треугольника SO_1M находим синус угла наклона боковой грани к плоскости основания пирамиды:

$$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5}{6}}\ \text{ и }\ \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Теперь из треугольника OO_1M находим радиус сферы

$$R=\frac{r}{\sin\varphi}=2\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

2. Находя радиус сферы, мы нашли апофему и радиус вписанной окружности. Применяя теперь последовательно теорему Пифагора и свой-

ства касательных, проведённых из одной точки к окружности, получим:

$$AK = AN = \sqrt{25-24} = 1;$$

$$BK = BL = 5;$$

$$CL = CM = \sqrt{SC^2 - h^2} = \sqrt{40-24} = 4.$$

Таким образом, длина ребра $BC = 9$.

3. Найдём величины тригонометрических функций углов четырёхугольника $ABCD$. Во-первых, используя радиус вписанной окружности и отрезки касательных, получим, что:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 2,\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{2}{5},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1$, то $\frac{A}{2}+\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$. Сумма всех углов четырёхугольника равна 2π и тем самым $\frac{B}{2}+\frac{D}{2} = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, находим, что

$$\operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{5}{2},\ \cos D = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{D}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{D}{2}} =$$

$$= -\frac{21}{29},\ \sin D = \frac{20}{29}.$$

4. Найдём величины углов SDA и SDC. Так как противолежащие им двугранные углы трёхгранного угла $DASC$ равны и проекция ребра SD есть биссектриса угла D, то указанные углы также равны. Обозначая эти углы через α, по теореме косинусов для трёхгранного угла имеем:

$$\cos\alpha = \cos\alpha\cos D + \sin\alpha\sin D\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1-\cos D}{\sin D\cos\varphi}.$$

Подставляя известные значения, получим, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1+\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

5. Найдём длину ребра CD. Для этого достаточно найти длину отрезка MD. Но

$$\frac{r}{MD} = \operatorname{tg}\frac{D}{2} = \frac{5}{2}.$$

Откуда $MD = \frac{4}{5}$, $CD = 4{,}8$.

6. Найдём величину двугранного угла при ребре CD, который мы обозначим через ψ. Он противолежит плоскому углу D, поэтому по теореме косинусов для трёхгранного угла $DASC$ опять-таки получим:

$$\cos D = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\psi =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cos\psi.$$

Следовательно,

$$-\frac{21}{29} = \frac{4}{34} + \frac{30}{34}\cos\psi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\psi = -\frac{\frac{21}{29}+\frac{2}{17}}{\frac{15}{17}} = -\frac{83}{87}.$$

Окончательно

$$\psi = \arccos\left(-\frac{83}{87}\right) = \pi - \arccos\frac{83}{87}.$$

Ответ: $R = 2\sqrt{\frac{6}{5}}$; $BC = 9$; $CD = 4{,}8$;

$$\psi = \pi - arc\cos\frac{83}{87}.$$

Отличная задача, только можно было бы вполне обойтись, что мы и сделали, без SB (объясните причину этого самостоятельно).

Задания для самостоятельного решения

Задача 1 (МГУ, 1995, мехмат). Некоторая сфера радиуса $\sqrt{3}$ касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Основанием служит треугольник со сторонами 5, 6, 9. Найдите высоту пирамиды.

Задача 2 (МГУ,1998, мехмат). Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается граней ABC, ACD, ADB в точках K, L, M соответственно. При этом точка L – на стороне CD, точка M – на стороне DB. Известно, что радиус сферы равен $\sqrt{3}$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle CAD = 75^\circ$, $\angle DAB = 75^\circ$. Найдите объём пирамиды.

Задача 3 (МФТИ, 2005). Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA. Известно, что высота пирамиды равна $\sqrt{6}$, $AB = 8$, $SB = 8$, $SC = 4\sqrt{6}$. Найдите длины рёбер BC и CD, радиус сферы и двугранный угол при ребре SD.

Ответы: 1) 2; 2) 12; 3) $R = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$; $BC = 16$; $CD = \frac{72}{2}$; $\psi = \pi - \arccos\frac{127}{145}$.

Приложение

Трёхгранный угол SABC может служить одним из пространственных аналогов треугольника. Он имеет три грани и, кроме этого, шесть углов – три так называемых линейных угла (их величины обозначим через α, β, γ) при его вершине S и три двугранных угла между его соседними гранями (рис. 3). Эти три пространственных угла измеряются при помощи их линейных углов, образованных перпендикулярами к линии пересечения соответствующих граней и лежащих в этих гранях (их величины мы будем обозначать через $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$).

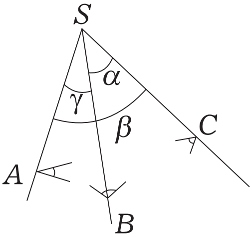

Рис. 3

Указанная аналогия становится более отчетливой, если сопоставить каждому трёхгранному углу треугольник, расположенный на сфере. Для этого представим себе, что имеется сфера единичного радиуса с центром в точке S. Плоскости, в которых содержатся грани трёхгранного угла, пересекают эту сферу по окружностям также единичного радиуса. Тем самым, мы получаем соответствие между трёхгранными углами $SABC$ и сферическими (криволинейными) треугольниками ABC, у которых сторонами являются дуги окружностей с единичными радиусами (рис. 4).

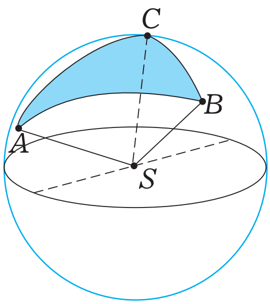

Рис. 4

По аналогии с планиметрическими задачами и теоремами о треугольниках естественным образом можно ставить вопросы из геометрии и тригонометрии трёхгранных углов (сферических треугольников). К такому типу вопросов относятся, например, такие:

1) каковы признаки равенства трёхгранных углов (сферических треугольников)?

2) каковы аналоги теорем синусов и косинусов для трёхгранных углов (сферических треугольников)?

Оставляя первый вопрос для дальнейших рассмотрений (или для самостоятельного продумывания), займёмся вторым. Сначала отметим (рис. 4), что длины сторон сферического треугольника ABC равны величинам плоских углов (в радианах) трёхгранного угла (почему?), а величины его углов равны величинам плоских углов двугранных углов трёхгранного угла. При этом, конечно, считается, что величина угла сферического треугольника равна величине угла между касательными к окружностям, дугами которых служат стороны треугольника.

Теорема синусов для трёхгранных углов. В принятых выше обозначениях для трёхгранного угла $SABC$, имеют место равенства

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A}=\frac{\sin\beta}{\sin\angle B}=\frac{\sin\gamma}{\sin\angle C}. \qquad (1)$$

Другими словами, для трёхгран ного угла синусы плоских углов трёх гранного угла пропорциональны си нусам противолежащих им двугран ных углов.

Доказательство. Для доказатель ства соотношения (1) проведём пер пендикуляр CH на плоскость $(ASB$ пусть $CS=c$. Через прямую CH про ведём теперь две плоскости (рис. 5 перпендикулярные двум другим рёб рам трёхгранного угла; точки их пе ресечения с этими рёбрами обозна чим через A и B.

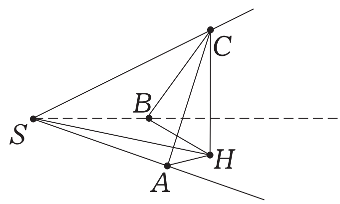

Рис. 5

Рассмотрим прямоугольные тре угольники CAH и CBH (с прямым у лом при вершине H), имеем:

$$\angle CBH=\angle B \quad \text{и} \quad \angle CAH=\angle A,$$

так как по построению $SA\perp CA$, HA $SB\perp CB$, BH.

Последовательно рассматрива пары прямоугольных треугольнико CAS и CAH, а также CBS и CBH, на ходим, что

$$CA=c\sin\angle CSA=c\sin\beta,$$

$$CH=CA\sin\angle CAH=c\sin\beta\sin\angle A,$$

$$CB=c\sin\angle CSB=c\sin\alpha,$$

$$CH=CB\sin\angle CBH=c\sin\alpha\sin\angle B.$$

Отсюда следует, что

$$\sin\beta\sin\angle A=\sin\alpha\sin\angle B.$$

Аналогично доказывается и второ равенство в (1).

Замечание. 1) Из равенства (получаем, что

$$\sin\angle A\sin\beta\sin\gamma=\sin\angle B\sin\gamma\sin\alpha=$$
$$=\sin\angle C\sin\alpha\sin\beta,$$

то есть произведение синуса дву гранного угла и синусов плоских у лов, расположенных в его плоскостях, постоянно для трёхгранного угла.

2) Если длины сторон α, β, γ сферического треугольника ABC (то есть, если линейные углы трёхгранного угла $SABC$) малы, то $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$, $\sin\gamma \approx \gamma$. В этом случае равенство (1) превращается в приближённое равенство

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\angle A} \approx \frac{\sin\beta}{\sin\angle B} \approx \frac{\sin\gamma}{\sin\angle C},$$

которое указывает на то, что для «маленьких» сферических треугольников теорема синусов превращается (но только приближённо) в обычную теорему синусов для треугольников.

Теорема косинусов для трёхгранных углов. В принятых выше обозначениях для трёхгранного угла $SABC$, имеет место равенство

$$\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \\ +\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\angle A. \qquad (2)$$

Доказательство. Проведём плоскость, перпендикулярную ребру SA трёхгранного угла $SABC$, и пусть эта плоскость пересекает два других ребра в точках B и C (рис. 6); ясно, что $\angle CAB = \angle A$.

Если $SA = a$, то в принятых обозначениях для трёхгранного угла $SABC$ из прямоугольных треугольников SAB и SAC находим, что

$$AC = a\,\mathrm{tg}\,\beta,\ AB = a\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

$$SC = \frac{a}{\cos\beta},\ SB = \frac{a}{\cos\gamma}.$$

По теореме косинусов для треугольников ABC и SBC получаем, что

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - \\ -2AC\cdot AB\cos\angle A = \\ = a^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta + a^2\,\mathrm{tg}^2\,\gamma - \\ -2a^2\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma\cos\angle A,$$

$$BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB\cdot SC\cos\alpha =$$

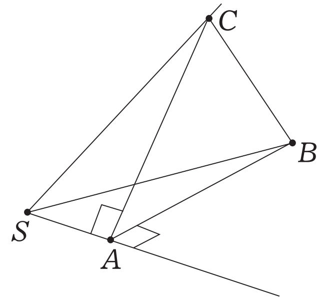

Рис. 6

$$= \frac{a^2}{\cos^2\beta} + \frac{a^2}{\cos^2\gamma} - \frac{2a^2}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha.$$

Приравнивая найденные значения для BC^2 и используя формулу

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x,$$

после всевозможных сокращений получаем равенство

$$2 - \frac{2}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha = \\ = -\frac{2\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\angle A,$$

откуда и следует нужное равенство (2). Для завершения доказательства теоремы косинусов осталось рассмотреть случаи, когда плоскость, которую мы проводили перпендикулярно SA, не пересекает лучей SB и SC (или одного из них). Рассмотрение этих случаев мало что меняет в проведённых выше вычислениях, и мы их оставляем читателю в качестве упражнения.