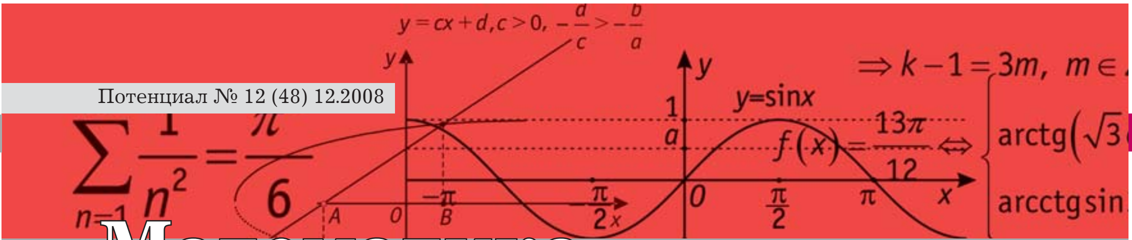


Мирошин Владимир Васильевич
Учитель гимназии № 1522 г. Москва, старший преподаватель кафедры математического анализа Московского городского педагогического университета, закончил механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Почётный работник образования, 25 лет работает в школе. Автор пособий по подготовке к ЕГЭ по математике.

Параллельное проектирование в задачах

Изображение пространственной фигуры играет важную роль в решении большинства стереометрических задач. Существуют общепринятые и часто используемые изображения основных стереометрических объектов – призм, пирамид, конусов и т.д. Но изображение – плоское, и поэтому фигура может изображаться в различных ракурсах.

В рассматриваемых ниже задачах к решению приводит построение изображений многогранников, отличающееся от обычных.

Задача 1. (МГУ, мех-мат) На диагоналях A_1B и B_1C боковых граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда AC_1 (рис. 1). Найдите отношение $MN : AC_1$.

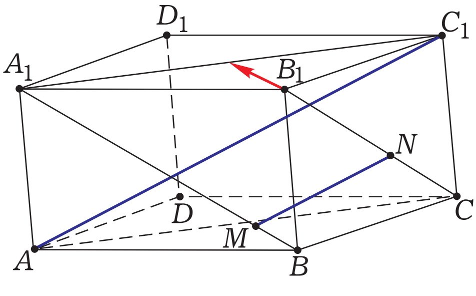


Рис. 1

Решение. Посмотрим на параллелепипед «вдоль» диагонали B_1D_1 (рис. 2).

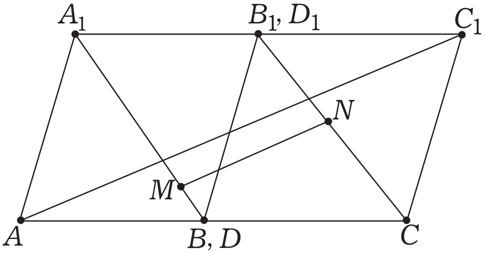


Рис. 2

Образы вершин B и D совпадут с серединой AC, аналогично образы вершин B_1 и D_1 совпадут с серединой A_1C_1. При параллельном проектировании образами параллельных прямых являются параллельные прямые, и к тому же отношения отрезков, расположенных на параллельных прямых, сохраняются. Поэтому образы диагоналей A_1B и B_1C разделят образ AC на три равных отрезка, средний из которых будет равен образу MN. Поэтому

$$MN : A_1C = 1 : 3.$$

Ответ: $1:3$.

Задача 2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N – середины боковых рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. На отрезках CM и AB_1 расположены соответственно точки E и F так, что $EF \parallel BN$ (рис. 3). Найдите отношение $EF : BN$.

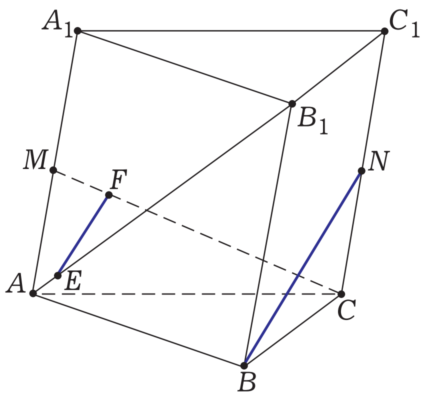


Рис. 3

Решение. Выберем в качестве плоскости проектирования плоскость основания призмы (ABC), а в качестве прямой проектирования – прямую MC. При таком выборе образом боковой грани AA_1C_1C призмы будет отрезок, расположенный на прямой AC, а образом боковой грани BB_1C_1C – параллелограмм, одной из сторон которого будет BC (рис. 4).

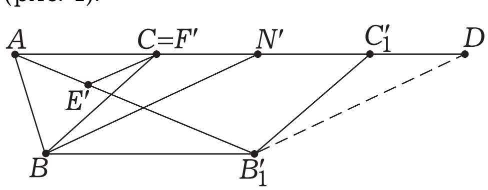


Рис. 4

Так как N – середина ребра и $A_1N \parallel MC$, то $AC = CN' = N'C_1'$, где N', C_1' – образы соответствующих точек. Проведём $B_1'D \parallel BN'$. Получим:

$$\frac{EF}{BN} = \frac{E'F'}{BN'} = \frac{AF'}{AD} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $1:4$.

Задача 3. В пирамиде $ABCD$ точки M, F и K – середины рёбер BC, AD, CD соответственно. На прямых AM и CF взяты соответственно точки P и Q так, что $PQ \parallel BK$ (рис. 5). Найдите отношение $PQ : BK$.

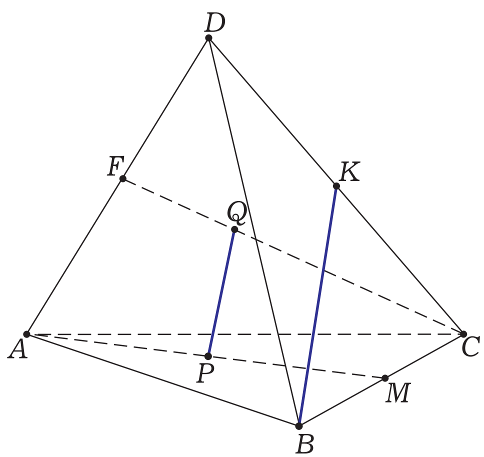


Рис. 5

Решение. Следуя предыдущим примерам, мы должны выбрать плоскость проектирования и прямую проектирования так, чтобы наиболее простым образом найти нужное нам отношение. В качестве плоскости проектирования изберём плоскость основания (ABC), а в качестве прямой проектирования – прямую FC. Образом отрезка $FK = \frac{1}{2}AC$ будет отрезок $CK' = \frac{1}{2}AC$. Образом отрезка PQ будет отрезок $PC \parallel BK'$ (рис. 6).

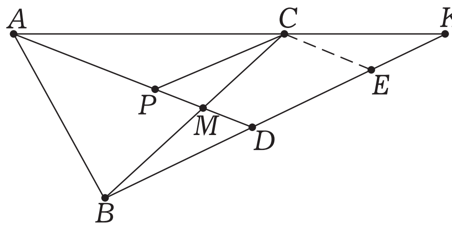


Рис. 6

Продолжим AM до пересечения с BK' в точке D и проведём $CE \parallel AD$. Получим:

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BD}{PC}=\frac{1}{1},\ \frac{CK'}{CA}=\frac{K'E}{ED}=\frac{1}{2}.$$

И так как $PC=ED$, получим, что

$$\frac{PQ}{BK}=\frac{PC}{BK'}=\frac{2}{2+2+1}=\frac{2}{5}.$$

Ответ: $2:5$.

Задача 4. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости (BDC_1) и $AM:AD=1:5$ (рис. 7). Найдите отношение $CN:CA_1$.

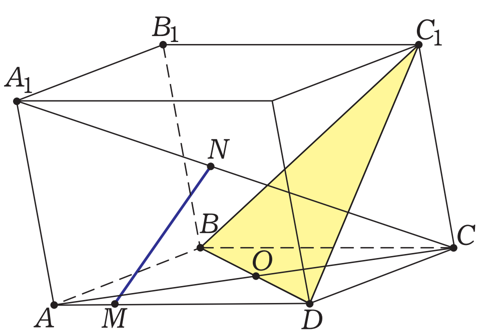


Рис. 7

Решение. Как и в первой задаче, построим проекцию параллелепипеда на плоскость (AA_1C_1C) вдоль прямой BD. Так прямая проектирования лежит в плоскости (BC_1D), то эта плоскость отобразится в прямую OC_1, а параллельный плоскости отрезок MN – в отрезок $M'N \parallel OC_1$ (рис. 8).

Продолжим C_1O и NM' до пересечения с AA_1. Имеем:

$$\frac{AM}{MD}=\frac{AM'}{M'O}=\frac{1}{4},\quad \frac{M'O}{OC}=\frac{NP}{PC}=\frac{4}{5}.$$

Так как O – середина AC, то

$$AQ=AA_1,\quad \frac{AR}{RQ}=\frac{1}{4},\quad \frac{A_1R}{RQ}=\frac{6}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{CN}{A_1C}=\frac{9}{4+5+6}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $3:5$.

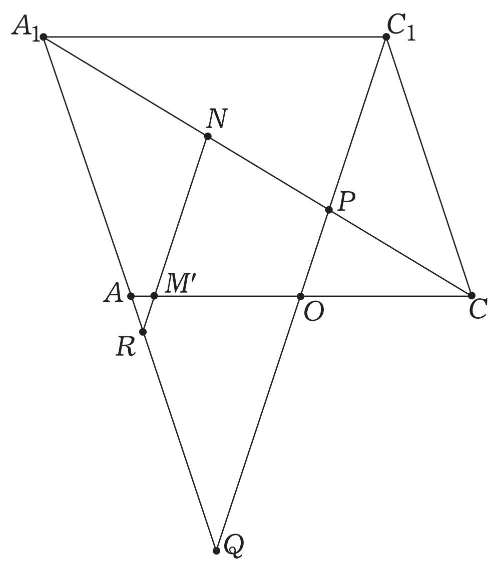


Рис. 8

Задача 5. (МФТИ, 1981 г., конкурс абитуриентов 2007/2008 года по решению задач вступительных испытаний МФТИ) Точка D – середина ребра A_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Правильная треугольная пирамида $SMNP$ расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью треугольника ABC, вершина M лежит на продолжении AC, причём $CM=$

$=\frac{1}{2}AC$, ребро SN проходит через точку D, а ребро SP пересекает отрезок BB_1 (рис. 9). В каком отношении отрезок BB_1 делится точкой пересечения?

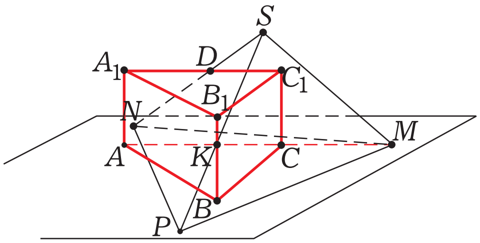


Рис. 9

Решение. Прежде всего, посмотрим «сверху», т.е. спроектируем оба многогранника на их общую плоскость основания. Вершина S пирамиды спроектируется в центр треугольника MNP (рис. 10).

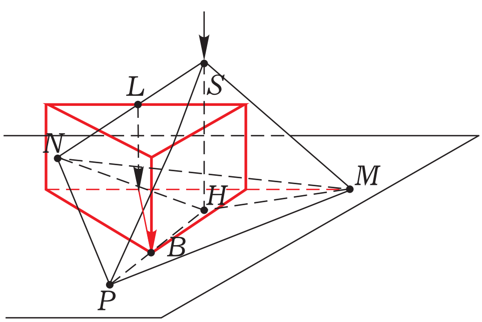


Рис. 10

Образами боковых рёбер будут служить радиусы описанной возле него окружности, проведённые в вершины. Образы точек D и K будут лежать на перпендикуляре, проведенном к AM из вершины B. Но самое интересное, что точка M, точка B и образ точки D будут видны из образа вершины пирамиды под углами $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, точка H – точка Торричелли для прямоугольного треугольника MBD (рис. 11).

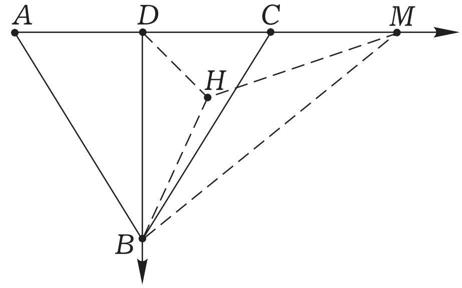
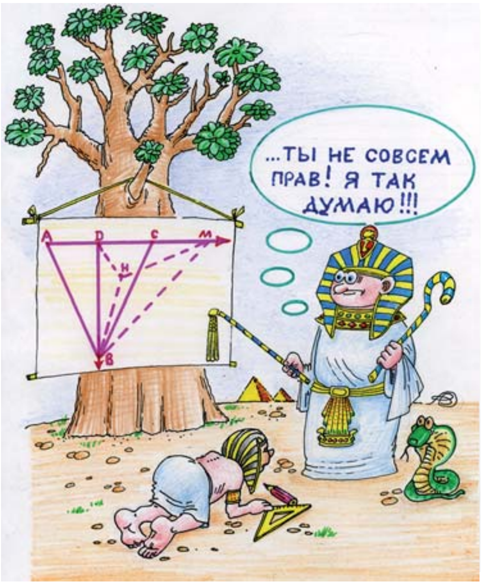


Рис. 11

Не меняя общности, образ точки D мы обозначили также. Напомним, что точкой Торричелли называется точка, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна.

Из условия задачи можно найти отношение $BD:DM=b:a=\mathrm{tg}\,\varphi$, где $\varphi=\angle DMB$.

Следует установить отношение расстояний от точки H до вершин прямоугольного ΔDMB. Введём систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось в точке D, ось абсцисс была направлена по лучу DM, а ось ординат – по лучу DB.



Точка H будет точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников DHB и MHD, углы в вершинах H которых равны $\frac{2\pi}{3}$ (рис. 12). Кроме того, окружность, описанная около первого треугольника, пройдёт, очевидно, через точку A. Следовательно, AB – её диаметр, а её уравнение:

$$\left(x+\frac{a}{4}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}.$$

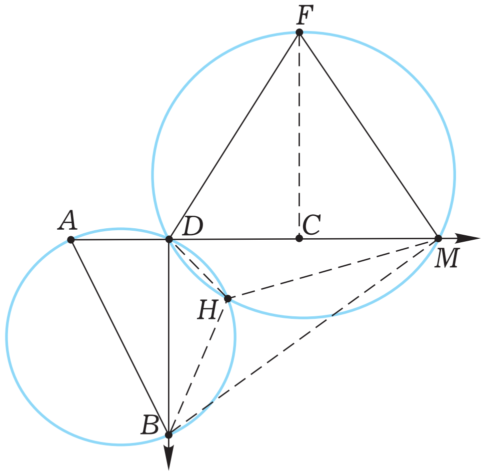


Рис. 12

Аналогично, точка H будет лежать на окружности, описанной возле равностороннего треугольника DMF, сторона основания которого равна a. Её уравнение будет иметь вид:

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{a^2}{3}.$$

Для нахождения координат точки H решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+\frac{a}{2}x+y^2-by=0, \\ x^2-ax+y^2+\frac{a\sqrt{3}}{3}y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{a}{2}x+y^2-by=0, \\ \frac{3a}{2}x=\left(b+\frac{a}{\sqrt{3}}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{a}{2}x+y^2-by=0, \\ y=\frac{3\sqrt{3}a}{2\left(a+b\sqrt{3}\right)}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{a}{2}x+y^2-by=0, \\ y=\frac{3\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi\right)}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi\right)}x, \\ x^2\left(1+\frac{27}{4\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi\right)^2}\right)+ \\ +x\left(\frac{a}{2}-\frac{3\sqrt{3}a\cdot\operatorname{tg}\varphi}{2\left(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi\right)}\right)=0. \end{cases}$$

Понятно, что первое решение системы $(0;0)$, т.к. обе окружности проходят через начало координат.

Найдём второе решение системы, обозначив $\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi=k$:

$$x\left(\frac{4(1+k)^2+27}{4(1+k)^2}\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{2k-1}{1+k}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=a\cdot\frac{2(2k-1)(k+1)}{4(k+1)^2+27}.$$

Соответственно

$$y=\frac{3\sqrt{3}}{2(1+k)}\cdot a\cdot\frac{2(2k-1)(k+1)}{\left(4(k+1)^2+27\right)}=$$

$$=a\frac{3\sqrt{3}(2k-1)}{4(k+1)^2+27}.$$

Учитывая, что $k=\frac{3}{2}$, получим координаты точки H:

$$x=\frac{5}{26}a,\ \ y=a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{26}.$$

Найдём искомые расстояния:

$$DH=\sqrt{\frac{25}{676}+\frac{27}{676}}\cdot a=\sqrt{\frac{52}{676}}\cdot a=\frac{a}{\sqrt{13}};$$

$$HM=\sqrt{\left(\frac{5}{26}-1\right)^2+\frac{27}{676}}\cdot a=$$

$$=\sqrt{\frac{441+27}{676}}=\frac{3a}{\sqrt{13}};$$

$$HB=\sqrt{\frac{25}{676}+\left(\frac{3\sqrt{3}}{26}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot a=$$

$$=\sqrt{\frac{325}{676}}\cdot a=\frac{5a}{2\sqrt{13}}.$$

Для получения окончательного решения сделаем ещё вот что: совместим треугольники SHM, SHP и SHN (рис. 13). Так как

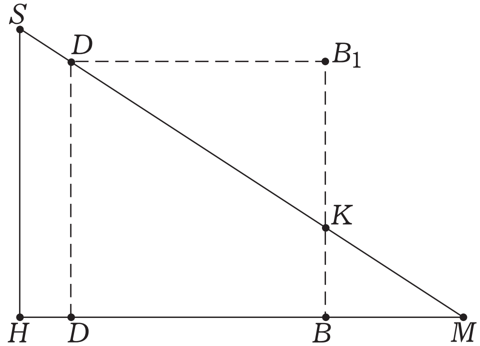


Рис. 13

$$HD=\frac{1}{3}HM,\ HB=\frac{5}{6}HM,\ \text{то}$$

$$\frac{B_1K}{KB}=\frac{DK}{KM}=\frac{DB}{BM}=\frac{3}{1}.$$

Действительно, «сверху и сбоку» виднее.

Ответ: $3:1$.

Упражнения.

1. На диагоналях AC и BA_1 боковых граней параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки M и N так, что отрезок MN параллелен диагонали параллелепипеда DB_1. Найдите отношение $MN:DB_1$.

2. На диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка M, а на прямой B_1C – точка N так, что отрезки MN и BD параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

3. Точка E – середина ребра MQ правильной четырёхугольной пирамиды $SMNPQ$. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен так, что плоскость грани $ABCD$ совпадает с плоскостью $MNPQ$, вершина B_1 лежит на ребре SN, точка E лежит на прямой AB, причём $EA=AB$. Прямая SP пересекает ребро CC_1. В каком отношении отрезок CC_1 делится точкой пересечения?

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка D – середина ребра A_1C_1. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость её основания совпадает с плоскостью (ABC), первое боковое ребро проходит через вершину B, второе – через точку D, а третье пересекает ребро CC_1. Найдите отношение объёма пирамиды к объёму призмы.

5. Через середины M и N рёбер AD и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная диагонали DB_1. В каком отношении эта плоскость делит ребро BB_1?

Ответы к упражнениям. 1) $1:2$; **2)** $1:3$; **3)** $5:1$; **4)** $16:21$; **5)** $5:1$, считая от точки B.