Расстояние между скрещивающимися прямыми

Одним из наиболее трудных вопросов учебной программы школьной геометрии является вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. Статья посвящена некоторым методам решения подобных задач.

1. Определения, теоремы и следствия

Напомним определения. Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости и не пересекаются. *Расстоянием* между скрещивающимися прямыми называется длина отрезка с концами на этих прямых, перпендикулярного им обеим. Этот отрезок называется общим перпендикуляром к скрещивающимся прямым.

Верна следующая теорема.

Теорема. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым существует и единственен (рис. 1).

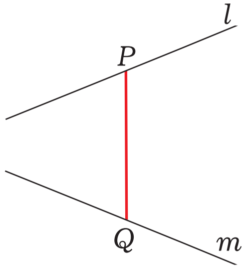

Рис. 1

Однако теорема даёт ответ на вопрос только о *существовании* общего перпендикуляра. При решении задач более важными являются следствия, которые дают способы определения расстояния между скрещивающимися прямыми.

Следствие 1. Длина общего перпендикуляра равна длине любого перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной прямой на плоскость ей параллельную и содержащую вторую из скрещивающихся прямых (рис. 2).

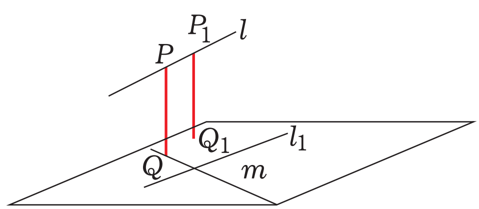

Рис. 2

Следствие 2. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, каждая из которых содержит одну из этих прямых.

Следствие 3. Если скрещивающиеся прямые перпендикулярны, то длина общего перпендикуляра есть расстояние от точки пересечения одной из скрещивающихся прямых с плоскостью ей перпендикулярной и содержащей вторую скрещивающуюся прямую (рис. 3).

Важную роль при решении задач играют и свойства многогранников, в плоскостях граней или в плоскостях сечений которых часто располагаются заданные скрещивающиеся прямые.

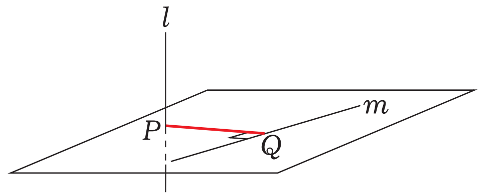

Рис. 3

2. Построение общего перпендикуляра

Сначала приведем решения задач, в которых расстояние между скрещивающимися прямыми находится в результате построения общего перпендикуляра на основе сформулированных выше теоремы и следствий.

Задача 1. (См. [1]). В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC, $AB = AC = 8$, один угол которого равен 60°. Точка P расположена на ребре AA_1, причём $AP : PA_1 = 2:1$ (рис. 4). Найдите тангенс угла между плоскостями (ABC) и (PCB), если расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно $18\sqrt{3}$.

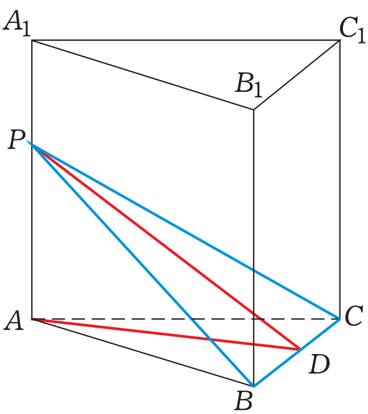

Рис. 4

Решение. Так как треугольник ABC – равнобедренный и один из его углов равен 60°, то этот треугольник – равносторонний, а призма – правильная. Отрезки AB и B_1C_1 расположены в параллельных плоскостях (ABC) и $(A_1B_1C_1)$, следовательно, расстояние между прямыми AB и B_1C_1 равно расстоянию между содержащими их плоскостями оснований призмы (см. следствие 2). Но расстояние между плоскостями оснований правильной призмы равно длине бокового ребра. Таким образом, $AA_1 = 18\sqrt{3}$. Тогда $AP = 12\sqrt{3}$. Проводя высоту основания AD, которая является высотой равностороннего треугольника ABC, и соединяя точки P и D, получим, что $\angle PDA$ – угол между указанными плоскостями. Отсюда имеем

$$\operatorname{tg}\angle PDA = \frac{AP}{AD} = \frac{12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 2. (См. [2]). Основание пирамиды $ABCD$ – треугольник ABC со сторонами $AC = 6, BC = 8, AB = 10$. Все боковые ребра равны $5\sqrt{2}$. Найдите расстояние между прямыми DM и BC, где DM – высота пирамиды $ABCD$.

Решение. Заметим, что треугольник ABC – прямоугольный (почему?). И так как все боковые ребра пирамиды равны, то равны и их проекции на плоскость треугольника ABC. Следовательно, точка M равноудалена от точек A, B, C и является центром описанной около треугольника ABC окружности, а значит, M – середина гипотенузы AB (рис. 5). И так как DM – высота

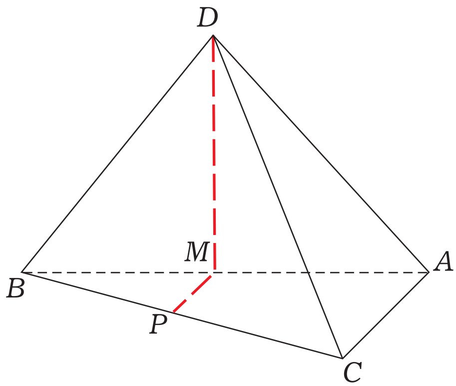

Рис. 5

пирамиды, то расстояние между прямыми DM и BC есть длина перпендикуляра PM, проведенного из точки M до пересечения с катетом BC (см. следствие 3). Но PM – средняя линия треугольника ABC, и поэтому $PM = \frac{1}{2}AC = 3$.

Ответ: 3.

Задача 3. (См. [2]). В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра BB_1. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CM.

Решение. Построим плоскость, содержащую прямую CM и параллельную прямой AB_1. Для этого в плоскости правой грани куба AA_1B_1B проведём прямую $MN \parallel AB_1$. Так как M – середина ребра BB_1 и $MN \parallel AB_1$, то N – середина ребра AB. Следовательно, MN – средняя линия треугольника ABA_1 и плоскость равнобедренного треугольника (CMN) – искомая плоскость.

Пусть P – середина AB_1, т. е. точка пересечения диагоналей правой грани куба. Так как диагонали квадрата перпендикулярны, а $MN \parallel AB_1$, то $PR \perp MN$, где R – середина MN (рис. 6). Отрезок CR –

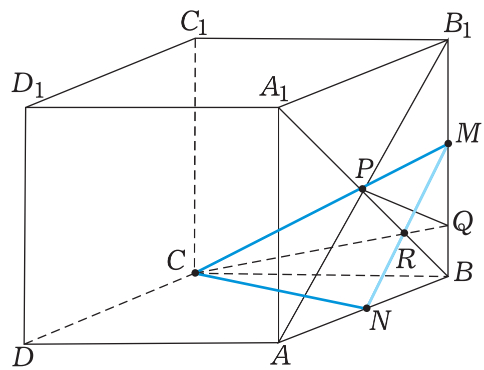

Рис. 6

медиана равнобедренного треугольника CMN, поэтому $CR \perp MN$. Отсюда следует, что $MN \perp (CPR)$. Плоскости (A_1BCD_1) и (CMN) перпендикулярны и пересекаются по прямой CR. Проведём в плоскости (A_1BCD_1) отрезок $PQ \perp CR$ (рис. 7),

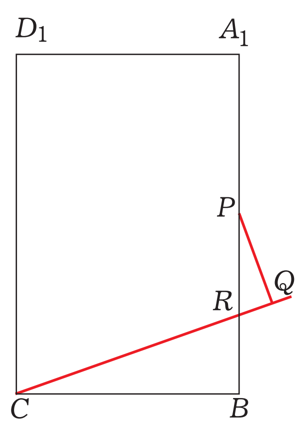

Рис. 7

Получим, что $PR \perp (CMN)$ и его длина равна длине общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым AB_1 и CM.

Так как

$$\operatorname{tg}\angle CRB = 2\sqrt{2},$$

$$\sin\angle CBR = \sin\angle PRQ = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

то $PQ = PR\sin\angle PRQ = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{1}{3}.$

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

Задача 4. (См. [3]). На прямой l в пространстве расположены точки A, B и C так, что $AB = 18$, $BC = 14$. Найдите расстояние между прямыми l и m, если расстояние от точек A, B и C до прямой m равны 12, 15 и 20 соответственно (рис. 8).

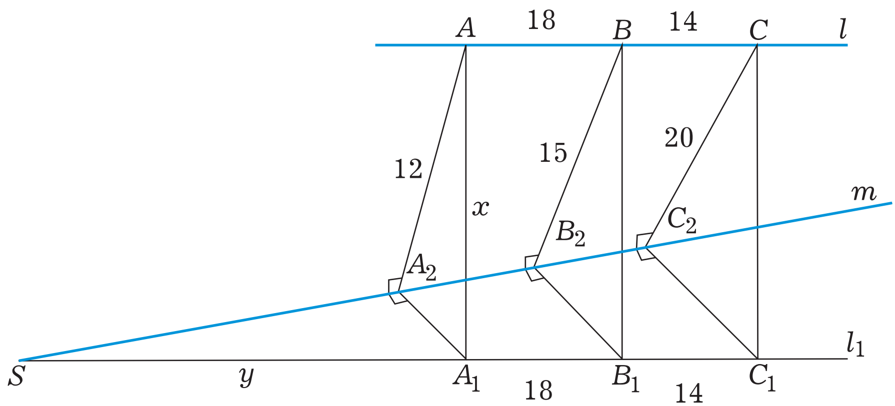

Рис. 8

Решение. Построим плоскость, содержащую прямую m и параллельную прямой l. Из точек A, B и C на построенную плоскость опустим перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1, построив, таким образом, проекцию прямой l – прямую l_1. Проведём также перпендикуляры из точек A, B и C на прямую m: AA_2, BB_2, CC_2. Они будут наклонными к построенной нами плоскости. По теореме о трёх перпендикулярах их проекции A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 будут перпендикулярны прямой m.

Прямые l_1 и m пересекутся в точке S, лежащей на луче $[B_1A_1)$. Обозначим длину отрезка прямой l_1 от точки A_1 до точки пересечения S как y. Из подобия получившихся прямоугольных треугольников находим, что

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{y}{y+18};\ \frac{A_1A_2}{C_1C_2} = \frac{y}{y+32}.$$

Возводя отношения в квадрат, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{144-x^2}{225-x^2} = \dfrac{y^2}{(y+18)^2}, \\ \dfrac{144-x^2}{400-x^2} = \dfrac{y^2}{(y+32)^2}, \end{cases}$$

где x – длина искомого перпендикуляра.

$$\begin{cases} \dfrac{144-x^2}{225-x^2} = \dfrac{y^2}{(y+18)^2}, \\ \dfrac{144-x^2}{400-x^2} = \dfrac{y^2}{(y+32)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 144(y+18)^2-225y^2= \\ =x^2\left((y+18)^2-y^2\right), \\ 144(y+32)^2-400y^2= \\ =x^2\left((y+32)^2-y^2\right). \end{cases}$$

Исключая x^2, будем иметь:

$$\frac{-81y^2+144(36y+324)}{-256y^2+144(64y+1024)}=\frac{36y+324}{64y+1024}.$$

После сокращения на постоянные множители обеих частей пропорции получим:

$$\frac{-9y^2+576(y+9)}{-16y^2+576(y+16)}=\frac{y+9}{y+16}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9y^3=-16y^3 \Leftrightarrow y=0.$$

Прямые m и l_1 пересекутся в точке A_1. Таким образом, точки A_1 и A_2 совпадают. То есть, AA_1 и есть искомый перпендикуляр. Но $AA_1 \equiv AA_2 = 12$.

Ответ: 12.

3. Использование формулы объёма тетраэдра

Во всех выше разобранных задачах решение сводилось к явному построению общего перпендикуляра или отрезка, равного ему. Но достаточно часто можно обойтись без этого. Решение, не требующее такого построения, основывается на формуле объёма тетраэдра (треугольной пирамиды), в которой явно присутствует расстояние между скрещивающимися прямыми.

Объём тетраэдра может быть вычислен по формуле: $V=\frac{1}{6}abd\sin\alpha$, где a и b – длины скрещивающихся рёбер треугольной пирамиды, α – угол между содержащими их прямыми, d – расстояние между этими прямыми. Доказательство можно найти в книге [4].

Эту формулу целесообразно использовать для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, если при решении задачи возможно определить все величины, кроме расстояния.

Задача 5. (См. [2]). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Найдите расстояние между прямыми A_1D и D_1C (рис. 9).

Решение. Длины отрезков A_1D и D_1C равны $a\sqrt{2}$, угол между ними

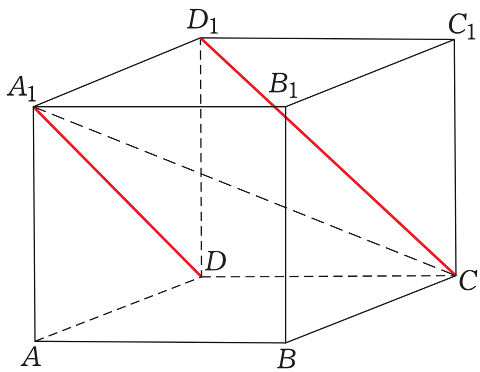

Рис. 9

равен 60° (угол между скрещивающимися диагоналями боковых граней куба, он равен углу при вершине C правильного треугольника CB_1D_1). Наконец, объём пирамиды CA_1DD_1 равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{a^3}{6}$ (основание – треугольник DD_1A_1, высота CD). Следовательно, расстояние

$$d=\frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{1}{6}\cdot 2a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Задача 6. (См. [2]). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите расстояние между прямыми AC_1 и A_1B.

Решение. Рассматриваемая призма $ABCA_1B_1C_1$ состоит из пирамиды ABA_1C_1 и двух равновеликих, т. е. равного объёма, пирамид $BA_1B_1C_1$ и C_1ABC, объём каждой из которых равен $\frac{1}{3}$ объёма призмы (рис. 10).. Поэтому объём пирамиды ABA_1C_1 также равен $\frac{1}{3}$ объёма призмы, который, в свою очередь, равен $V = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Следовательно, объём пирамиды ABA_1C_1 равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Длины рёбер $A_1B = AC_1 = \sqrt{5}$. Осталось определить угол между прямыми BA_1 и AC_1. Проведём $C_1N \parallel A_1B$. Получим равнобедренный треугольник AC_1N

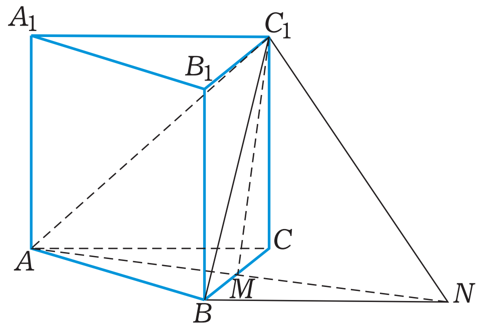

Рис. 10

со сторонами $AC_1 = C_1N = \sqrt{5}$, $AN = \sqrt{3}$ (рис. 10). Проводя высоту C_1M в этом треугольнике и обозначив $\angle AC_1N = \alpha$, получим, что

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{20}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{17}{20}},\ \sin\alpha = 2\frac{\sqrt{51}}{20} = \frac{\sqrt{51}}{10}.$$

Определим расстояние, используя приведённую выше формулу объёма тетраэдра:

$$d = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{6}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{51}}{10}} = \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{17}}{17}$.

4. Векторный метод

Наиболее общим способом определения расстояния между скрещивающимися прямыми является применение векторного метода. Отыскивается вектор, равный по длине общему перпендикуляру к скрещивающимся прямым и перпендикулярный любому ненулевому вектору, расположенному на каждой из этих прямых. Исходя из равенства нулю скалярного произведения двух перпендикулярных векторов, мы получаем систему уравнений, позволяющую определить координаты отыскиваемого вектора.

Задача 7. (См. [2]). Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M – середина ребра BB_1. Найдите угол и расстояние между прямыми AC_1 и DM. В каком отношении общий перпендикуляр этих прямых делит отрезок DM?

Решение. Так как рёбра куба имеют длину, равную единице, то введём декартов базис: $\overrightarrow{AD}=\vec{i}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{k}$. В декартовом базисе вектор $\overrightarrow{AC_1}$ имеет координаты $(1;\,1;\,1)$, а вектор $\overrightarrow{DM}-\left(-1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

Найдём угол между векторами $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{DM}$. По определению скалярного произведения

$$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DM}=\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DM}\right|\cdot\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами. В декартовом базисе скалярное произведение равно сумме попарных произведений соответствующих координат векторов, а модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Получим, что $\cos\varphi=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}.$

Следовательно,

$$\varphi=\arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Дадим ответы на два оставшихся вопроса задачи. Пусть точки P и Q таковы, что отрезок PQ – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AC_1 и DM. Тогда $\overrightarrow{PQ}$ – вектор, который перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{DM}$ (рис. 11). Запишем верное равенство

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}.$$

Из него получим, что

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PA}.$$

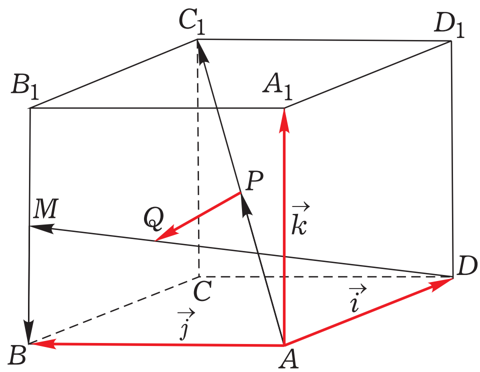

Рис. 11

Вектор $\overrightarrow{QM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{DM}$, т. е. существует такое число α, что $\overrightarrow{QM}=\alpha\cdot\overrightarrow{DM}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{MQ}$ имеет координаты $\left(\alpha\,;\,-\alpha\,;\,-\frac{1}{2}\alpha\right)$.

Векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{AB}$ имеют координаты соответственно $\left(0;\,0;\,\frac{1}{2}\right)$, $(0;\,1;\,0)$. Вектор $\overrightarrow{AP}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AC_1}$, т. е. существует такое число β, что $\overrightarrow{AP}=\beta\cdot\overrightarrow{AC_1}$ и следовательно, вектор $\overrightarrow{PA}$ имеет координаты $(-\beta\,;\,-\beta\,;\,-\beta)$. Складывая четыре вектора, получим, что координатами вектора $\overrightarrow{PQ}$ будут числа $\left(\alpha-\beta\,;\,1-\alpha-\beta\,;\,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha-\beta\right)$.

Величины α и β определим из системы:

$$\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0{,}5\alpha+3\beta=1{,}5,\\ 2{,}25\alpha+0{,}5\beta=1{,}25\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{6}{13},\\ \beta=\dfrac{11}{26}.\end{cases}$$

В результате получим вектор $\overrightarrow{PQ}\left(\dfrac{1}{26};\dfrac{3}{26};-\dfrac{4}{26}\right)$. Его длина, т. е. длина общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым AC_1 и DM равна

$$d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\frac{\sqrt{1+9+16}}{26}=\frac{1}{\sqrt{26}}.$$

И последнее: $\dfrac{\left|\overrightarrow{QM}\right|}{\left|\overrightarrow{DM}\right|}=|\alpha|=\dfrac{6}{13}$. Откуда

$$\frac{MQ}{QD}=\frac{6}{7}.$$

Ответ:

$$\varphi=\arccos\frac{1}{3\sqrt{3}};\ d=\frac{1}{\sqrt{26}};\ \frac{MQ}{QD}=\frac{6}{7}.$$

В силу перпендикулярности векторов декартового базиса их попарные скалярные произведения равны нулю, что даёт большое упрощение при вычислениях. В случае произвольного, т. е. аффинного базиса, следует учитывать величину углов между каждой парой базисных векторов при вычислении их скалярных произведений.

Задача 8. (См. [2]). В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, точка M – середина ребра BC, а точка N – середина AB. Найдите угол и расстояние между прямыми CN и DM. В каком отношении общий перпендикуляр к этим прямым делит отрезок DN?

Решение. Введём векторы $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ (рис. 12). Длины векторов равны 1, а угол между каждой парой этих векторов равен 60°. Составим «таблицу скалярного умножения» базисных векторов. Выразим через базисные векторы каждый вектор, необходимый для решения задачи.

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{c}+\vec{b}-\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}.$$

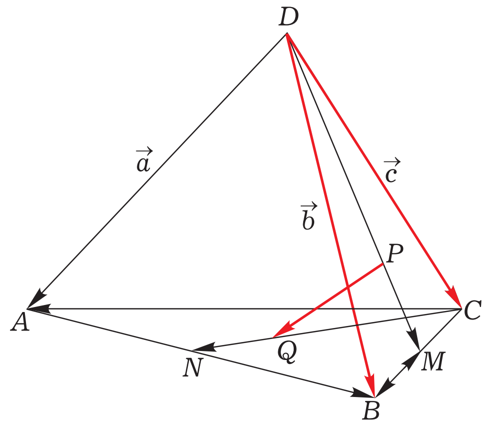

Рис. 12

Длины векторов $\left|\overrightarrow{DM}\right|=\left|\overrightarrow{CN}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а скалярное произведение

$$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{1}{8}$$

(см. таблицу). Найдём угол между прямыми CN и DM. Прямые образуют два смежных угла, косинусы которых противоположны. Так как мы хотим найти меньший из них, то его косинус будет равен

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{CN}\right|}{\left|\overrightarrow{DM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CN}\right|}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\varphi=\arccos\dfrac{1}{6}$.

Таблица

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\vec{b}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\vec{c}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Пусть точки P и Q таковы, что отрезок PQ – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым CN и DM. Тогда $\overrightarrow{PQ}$ – вектор, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{DM}$ (см. рис. 12). Запишем верное равенство:

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}=\vec{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{PM}.$$

Вектор $\overrightarrow{NQ}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{CN}$, т. е. существует такое число α, что

$$\overrightarrow{NQ}=\alpha\cdot\overrightarrow{CN}=\frac{\alpha}{2}\vec{a}+\frac{\alpha}{2}\vec{b}-\alpha\vec{c}.$$

Векторы $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$. Вектор $\overrightarrow{PM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{DM}$. Следовательно, существует такое число β, что $\overrightarrow{PM}=\frac{\beta}{2}\vec{b}+\frac{\beta}{2}\vec{c}$. Складывая четыре вектора, получим

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\vec{b}+$$
$$+\left(-\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}\right)\vec{c}.$$

Неизвестные числа α и β найдём из системы $\begin{cases}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{DM}=0\\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CN}=0\end{cases}$. При вычислении мы используем «таблицу умножения». Опуская выкладки, запишем систему в виде

$$\begin{cases}\alpha-6\beta=-1,\\ 6\alpha-\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{17}{35},\\ \beta=\frac{3}{35}.\end{cases}$$

Подставив найденные значения, получим, что $\overrightarrow{PQ}=\frac{9}{35}\vec{a}-\frac{7}{35}\vec{b}+\frac{1}{35}\vec{c}$.

Найдём длину

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}}=$$
$$=\sqrt{\frac{70}{1225}}=\sqrt{\frac{2}{35}}=\frac{2\sqrt{35}}{35}.$$

И, наконец, $\frac{NQ}{QC}=\frac{17}{18}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}$; $\frac{2\sqrt{35}}{35}$; 17:18.

Список литературы

1. Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ: 2010: Русский язык: Математика. Общая редакция: А.Л. Семенов, И.В. Ященко. – М: АСТ: Астрель, 2010.

2. *Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К.* Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами. – М.: ООО «Астрель», 2000.

3. *Ткачук В.В.* Математика – абитуриенту. – М.: МЦНМО, 2007.

4. *Шабунин М.И.* Математика для поступающих в вузы. – М.: Бином, 2002.