СУЩЕСТВЕННЫЕ ПРИЗНАКИ ПОНЯТИЯ «ПАРАМЕТР»

В.В. Мирошин,
Гимназия № 1522 (Москва)
e-mail: vmiroshin@gmail.com

В учебниках и учебных пособиях используются различные определения понятия «параметр», что приводит к неоднозначной трактовке. В статье указываются существенные признаки этого понятия, наличие которого или появление которого в задаче позволяет определить подходы к ее решению.

Ключевые слова: параметр, задачи с параметрами.

Если то или иное понятие четко не определено, то неизбежно возникает непонимание и неясность предмета рассуждения становится проблемной мыслительной ситуацией. Согласно «Философскому энциклопедическому словарю» «понятие – это мысль, высказывание, отражающие общие существенные признаки объекта». Неясность предмета рассуждения возникает обычно в следующих случаях. Во-первых, когда мы не понимаем какие-либо термины. Во-вторых, когда одно и то же понятие разные книги, словари и разные авторитеты определяют различно.

Именно таким образом обстоит дело с часто используемым понятиями «параметр» и «задача с параметрами». Большинством учителей и преподавателей задачи с параметрами воспринимаются как нечто надуманное, ненужное, предназначенное для затруднения поступления в вузы. При этом определяющую роль играет не личный опыт учителей, а большей частью «общественное мнение». Еще 40 лет тому назад в книге «Пособие по математике для поступающих в ВУЗы» было сказано: «Очень серьезные трудности вызывают обычно уравнения, неравенства и системы уравнений или неравенств с параметрами, в которых требуется найти такие значения этих параметров, при которых выполняются некоторые требования. Например, такие значения, при которых уравнение имеет единственное решение, или, наоборот, уравнению удовлетворяют все допустимые значения x, или всякое решение одной системы уравнений является решением другой системы или всякое решение одного неравенства является решением другого неравенства и т.п. Эти задачи являются, пожалуй, наиболее трудными из предлагаемых на экзаменах задач, и именно потому, что они требуют логической культуры – то есть того, чего не хватает большинству поступающих. Чтобы решить такую задачу необходимо в каждый момент представлять себе, что уже сделано и что еще предстоит сделать, что означают уже полученные результаты».

Положение всего комплекса учебно-методических и педагогических вопросов, связанных с задачами с параметрами, в современном математическом образовании в нашей стране достаточно уникально. С одной стороны, эти задачи есть и в весьма заметном количестве, а с другой стороны, их практически нет. С одной стороны все учителя в какой-то мере знакомы с простейшими приемами их решений, с другой – старательно избегают последовательного использования этих задач.

Вообще, практически на любом вступительном экзамене, проверяющем математическую подготовку на достаточно высоком уровне, задания на такую тему имеются. Более того, именно наличие в экзаменационном варианте задачи с параметром является своего рода знаком того, что в данном учебном заведении к преподаванию математики по конкретной учебной специальности относятся весьма серьёзно.

Для того чтобы преодолеть эти затруднения, необходимо дать корректные определения. Рассмотрим, например, определение, приведенное в книге Новоселова С.И. «Специальный курс алгебры», которое послужило основой определений большинства последующих изданий: «если в уравнение кроме неизвестных входят числа, обозначенные буквами, то они называются параметрами». Очевидно, что обозначение буквой не является существенным признаком такого понятия как «параметр».

Во-первых, существуют постоянные величины, которым также присвоено «имя собственное» – например: π, e, и т.д. Во-вторых, отсутствие в задаче переменных кроме неизвестной, так же не может служить признаком того, что данная задача – не является задачей с параметрами.

Определение. Параметром называется независимая переменная величина, входящая в условие задачи, или появляющаяся в процессе ее решения, «управляющая» решением задачи.

Поясним необходимость каждого из существенных признаков понятия «параметр», используемых в определении.

1. Независимость переменной, обозначенной термином «параметр» легко просматривается в большинстве соответствующих задач. Например, если поставлена задача «решить уравнение $x^2 + 1 = a$ относительно переменной x с параметром a», то независимость переменной a состоит хотя бы в том, что она не обязана принимать значения не меньшие 1, в силу равенства величине, принимающей такие значения.

2. «Управляемость» решением задачи данной переменной заключается в том, мы должны ей каждый раз «подчиняться», каждый раз указывая ответ в зависимости от значений этой переменной. Например, в приведенном выше уравнении ответ записывается следующим образом:

1) Если $a < 1$, то уравнение решений не имеет.

2) Если $a = 1$, то уравнению удовлетворяет единственное значение переменной $x = 0$.

3) Если $a > 1$, то уравнению удовлетворяют два значения переменной $x = \sqrt{a-1}$ и $x = -\sqrt{a-1}$.

3. В подавляющем большинстве задач некоторая переменная, входящая в условие явно «назначается» параметром. Таковы задачи, начинающиеся словами такими как «Найдите все значения параметра…», или « Решите … при всех значениях параметра…» в условии которых явно указан идентификатор параметра. Но есть широкий класс задач, по своей сути параметрических, которые традиция к таковым не относит. Это тригонометрические задачи, задачи на нахождение минимума и максимума, нахождение области значений некоторых функций и т.д. В этих задачах параметр появляется по ходу составления математической модели или по ходу решения задачи. В олимпиаде МГУ «Покори Воробьевы горы» предлагалась следующая задача: «Существует ли такой прямоугольный треугольник, что увеличенные на 1 оба его катета и гипотенуза являются соответственно катетами и гипотенузой другого прямоуголь-

ного треугольника? Тот же вопрос, если все три стороны исходного треугольника не увеличивать, а изменять на 1, то есть увеличивать или уменьшать – каждую по своему усмотрению». Решение задачи сводится к исследованию системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ (x+1)^2+(y+1)^2=(z+1)^2. \end{cases}$$

А если быть совсем точным, следует установить, имеет ли эта система хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям $0<x\le y<z$.

Можно привести и «параметрическую» формулировку. Существует ли хотя одно положительное значение параметра, при котором данная система имеет положительные решения? Мы сознательно не указываем, какая из переменных должна быть выбрана в качестве параметра. Это еще раз подчеркивает не только независимость соответствующей переменной, но и независимость самого выбора этой переменной.

4. Появление параметра может быть обусловлено свойствами функций, входящих в условие. Например, уравнение $\sqrt{\sin x-1}+\cos 4x=1$ равносильными преобразованиями сводится к системе

$$\begin{cases} \sin x=1 \\ \cos 4x=1, \end{cases}$$

которая в свою очередь сводится к системе

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \\ 4x=2\pi n, \end{cases} \quad k,\ n\in \mathbf{Z}$$

с двумя целочисленными параметрами k и n, появляющимися из-за свойства периодичности соответствующих функций.

Укажем еще пример, в котором появление параметра вызвано необходимостью найти путь решения уравнения, хотя в самом уравнении параметра нет.

Пример. Решите уравнение

$$\sin x+\cos 24x\cos x=\sqrt{2}.$$

Путь к решению состоит в параметризации условия задачи. Обозначив $\cos 24x=p$ и записав параметризованное условие в виде $\sin x+p\cos x=\sqrt{2}$, можно двигаться далее, выясняя, например, при каких значениях параметра данное уравнение имеет решение.

5. Даже <u>единственная</u> переменная, на каком-то этапе решения может приобретать свойства параметра.

Пример. Решите уравнение

$$\sqrt{5+\sqrt{5+x}}=x.$$

Р е ш е н и е. Проведем равносильные преобразования, рационализирующие данное уравнение.

$$\sqrt{5+\sqrt{5+x}}=x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 5+\sqrt{5+x}=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \sqrt{5} \\ 5+x=(x^2-5)^2. \end{cases}$$

Следующим шагом уравнение системы приводится к общему уравнению 4 степени вида $x^4-10x^2-x+20=0$, которое рациональных, а тем более, целых корней не имеет. Оно, конечно, может быть решено методом неопределенных коэффициентов, однако путь этот трудоемок и долог. Другое дело, если это уравнение рассмотреть как уравнение относительно <u>символа 5(!)</u>, придав временно переменной статус параметра, а символу 5, напротив, – статус переменной. Имеем:

$$5+x=5^2-2\cdot x^2\cdot 5+x^4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^2-(2x^2+1)\cdot 5+(x^4-x)=0.$$

Вычислим дискриминант этого уравнения (он будет зависеть от параметра!).

$$D(x)=(2x^2+1)^2-4(x^4-x)=$$
$$=4x^2+4x+1=(2x+1)^2.$$

Полученное уравнение легко разрешается относительно <u>символа 5</u>.

$$\sqrt{5+\sqrt{5+x}}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 5+\sqrt{5+x}=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \sqrt{5} \\ 5 + x = (x^2 - 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5} \le x \\ \left[\begin{array}{l} 5 = x^2 - x \\ 5 = x^2 + x + 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Вводимое таким образом понятие «параметр» дает возможность сформулировать определения, которые могут быть положены в основу формирования содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе средней и старшей школы.

Определение. Задача, условие которой содержит или в ходе решения которой появляется хотя бы одна независимая переменная, удовлетворяющая определению понятия «параметр», называется задачей с параметрами.

Мы считаем, что трудности в решении задач с параметрами связаны не столько с их технической сложностью, сколько с отсутствием ясного понимания многоуровневости таких задач. Например, в обычном уравнении «с иксом» следует просто найти его корни, следуя алгоритму решения, и на этом уровне решение заканчивается. А в уравнении с параметром следует перейти на более высокий уровень: надо еще на корни уравнения «посмотреть», то есть понять, как они изменяются при изменении данных задачи и, далее, определить какими должны быть эти числовые данные, чтобы корни уравнения в итоге удовлетворяли тому или иному условию. Поэтому, формирующаяся в школе привычка решить уравнение и на этом поставить точку, и вообще, присутствие в подавляющем числе уравнений и неравенств только одной переменной, сразу же переводит задачи с параметром в ранг трудных. Введение же задач с параметрами в повседневную практику приведет к появлению возможности для каждого учащегося приобрести навыки исследовательской деятельности, столь необходимой в современном обществе.

Литература

1. *Мирошин В.В.* Решение задач с параметрами. Теория и практика. – М. : Экзамен, 2009.