ЭЛЕМЕНТЫ НАУЧНОГО ПОИСКА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

В.В.Мирошин,
гимназия № 1522 (Москва)
e-mail: vmiroshin@gmail.com

В статье на примере двух задач рассматривается вопрос об общих подходах к разрешению учащимися проблемных ситуаций.

Ключевые слова: научный поиск, проблемная ситуация, генеральная проблема, задача с параметрами.

У истоков всякого научно-познавательного процесса находится какая-нибудь проблемная ситуация, чаще всего выступающая в качестве поставленной задачи, сформулированного утверждения и т.д. Рассмотрим, например, следующую задачу Московской математической олимпиады.

Задача 1.

Про числа a, b, c известно, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 > 4ac$.

Казалось бы, все очень просто. Необходимо, опираясь на заданное неравенство, путем формальных преобразований или, может быть, привлечением некоторых известных фактов из теории чисел получить требуемое утверждение. Но оказывается, не все так просто и прямолинейно. На пути к поставленной цели встает множество частных проблем и промежуточных вопросов, решение которых создает предпосылки для продвижения к конечному результату. К их числу относятся следующие. Какова цель исследования? Корректно ли сформулирована проблема? Каковы исходные данные и достаточны ли они для получения искомого результата? Какие дополнительные данные следует привлечь? Какова область поиска? Что является отправным пунктом исследования, с чего начать познавательный процесс? В каком направлении и по какому плану вести поиск? Какими средствами и методами следует воспользоваться в процессе исследования?

Парадокс всякого поискового процесса в том, что учащемуся, пытающемуся найти определенный результат, представленный в условии задачи в качестве неизвестной величины, следует отойти от него к более или менее отдаленному началу последовательности частичных проблем. Именно из-за отсутствия предпосылок, необходимых для того, чтобы решить задачу сразу, требуется совершить «проблемный отход», отступить к тем частичным задачам, для решения которых имеются необходимые данные. Дойдя до такой частичной задачи, учащийся затем должен двигаться обратно – к главному искомому, проходя шаг за шагом этапы решения промежуточных проблем. При этом он постоянно должен иметь в виду конечную цель, определяющую как общее направление исследования, так и все его этапы. На примере решения задачи 1 можно проследить, какой характер носит «проблемный отход», как происходит продвижение к цели, которая возникает в начале познавательного процесса и достигается в его конце.

Р е ш е н и е. Общий вид неравенства, которое предстоит доказать $(b^2 > 4ac)$, указывает на необходимость рассмотрения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ и квадратичной функции. Причем условие составлено таким образом, чтобы явно «подсказать» направление рассуждений. Если бы вместо идентификаторов a, b, c использовались какие-либо другие, то задача заведомо оказалась бы намного труднее. Заметим, что трудность в этом случае была бы чисто внутренней – учащимся нужно было бы преодолеть некий условный рефлекс, заложенный в их сознание существующей практикой использования идентификаторов переменных.

Итак, первый шаг в решении – введение квадратичной функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Второй шаг состоит в осмыслении доказываемого неравенства в рамках уже найденной области поиска:

$$b^2 > 4ac \iff b^2 - 4ac > 0 \iff D_f > 0.$$

Но положительность дискриминанта квадратного трехчлена равносильна наличию двух различных корней этого трехчлена. Следовательно, надо доказать, что при выполнении условий задачи квадратный трехчлен будет иметь различные корни. (Как далеко мы ушли от исходной проблемы!)

По мере раскрытия частичных проблем происходит трансформация основной проблемной ситуации: полученные результаты делают ее более полной и развернутой, появляется все больше предпосылок для решения генеральной проблемы. Совершенствуются структура и логическая организация элементов проблемной ситуации, в ней выделяются и становятся организующими те факторы, из которых непосредственно может следовать искомый результат.

Третий шаг состоит в том, чтобы понять, какое отношение к квадратному трехчлену имеют числа c и $a + b + c$. Нужно опять-таки понять, что речь идет не коэффициентах, а о значениях квадратного трехчлена. И тогда

$$c = f(0), \quad a + b + c = f(1)!$$

Но и этого пока недостаточно, чтобы до конца оценить глубину генеральной проблемы. Нужно еще осмыслить тот факт, что произведение двух чисел отрицательно, если числа имеют разные знаки, и связать данное с непрерывностью графика квадратичной функции.

В силу непрерывности графика квадратичной функции осознание наличия двух точек графика, расположенных в разных полуплоскостях относительно оси абсцисс, должно привести к пониманию того, что на интервале $(0; 1)$ парабола единожды пересекает ось абсцисс. Но так как квадратный трехчлен не может иметь единственный корень*, то есть и второй корень, отличающийся от первого! Следовательно, корни различны, т.е. $D_f > 0$, что в свою очередь дает искомое соотношение $b^2 > 4ac$. Неравенство доказано.

Генеральная проблема, определяющая цель всего познавательного процесса, формируется на основе исходной проблемной ситуации. Но часто такую проблему и цель удается определить не сразу, а лишь на последующих этапах.

Задача 2.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее значение выражения $-x^2 + 2ax + 2$ равно количеству целочисленных решений неравенства $x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$.

Решение. Разбиение поставленной проблемы на промежуточные на первых порах не вызывает никаких трудностей. Действительно, раз речь идет о числе це-

* Заметим, что в школе учат, например, что трехчлен $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ имеет один корень, а на самом деле, трехчлен имеет два совпадающих корня. А вот уравнению $x^2 - 2x + 1 = 0$ удовлетворяет единственное значение переменной.

лочисленных решений некоторого неравенства, то нельзя ли попытаться решить это неравенство? Ответ положителен.

$$x^2 - 4ax + 3a^2 \le 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (x-a)(x-3a) \le 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge 0 \\ a \le x \le 3a \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ 3a \le x \le a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вторым шагом является решение проблемы нахождения наибольшего значения выражения $-x^2 + 2ax + 2$ при каждом допустимом значении параметра. Однако относительно переменной x выражение имеет вид квадратного трехчлена, для которого установление искомых значений также не представляет трудностей.

Преобразуем данное выражение:

$$-x^2 + 2ax + 2 = -(x-a)^2 + a^2 + 2,$$

оно принимает наибольшее значение, равное $a^2 + 2$, при $x = a$.

И только после прохождения, как кажется, большей части исследования начинает формироваться понимание генеральной проблемы: а каково количество точек с целочисленными координатами, принадлежащих решению неравенства?

Проблемная ситуация, объединяющая в себе элементы данного и неизвестного, – противоречивое образование, незавершенная структура, в которой или отсутствуют некоторые компоненты, или имеет место несогласованность, конфликт между наличными компонентами. Познавательный процесс есть поэтому процесс постепенного превращения ситуации с элементами незавершенности, неполноты, противоречивости и неопределенности в завершенную и логически согласованную ситуацию, один или несколько компонентов которой (а иногда и вся она целиком) выступают в качестве решения генеральной проблемы.

В процессе решения проблем учащийся должен отыскать в сфере наличных данных или имеющейся системы знания основания для выбора и применения того или иного метода, средства или приема анализа. Таким образом, он решает эвристические проблемы; это относится к процессу выработки логики исследования, определения его направления и стратегии. Правильный выбор этих оснований важен потому, что каждая проблемная ситуация (как общая, так и частная) из-за своей содержательной неполноты и неопределенности не позволяет сразу и однозначно определить характер и содержание поисковых действий.

Большую трудность представляет собой задача определения последовательности решения промежуточных проблем – таких, которые вели бы к конечному результату правильным и как можно более коротким путем. Чаще всего сразу не удается построить всю систему подзадач, и очередная задача определяется, исходя из полученных промежуточных результатов.

Так происходит и в данном случае. Попытка однозначно разрешить возникшую проблему, обречена на неудачу. Действительно, на отрезке, скажем, длины 1,5, может лежать единственная целочисленная точка (как, например, на отрезе [0,1; 1,6]), так и большее их количество (как на отрезке [0,9; 2,5]).

При $a = 0$ неравенство $x^2 \le 0$ имеет единственное решение $x = 0$. В данном случае количество целых решений равно 1 и не совпадает с наибольшим значением выражения $-x^2 + 2$, которое равно 2. Докажем, что при $a \ne 0$ количество целых чисел, принадлежащих отрезку с концами в точках a и $3a$, не превосходит $2|a| + 1$.

Рассмотрим случай $a > 0$. Пусть k – наибольшее целое число, меньшее a, и

n – наименьшее целое число, большее $3a$, при этом $k < n$. Тогда $k = a - \lambda$, $0 < \lambda \le 1$ и $n = 3a + \mu$, $0 < \mu \le 1$. Количество целых чисел, принадлежащих отрезку $[a; 3a]$, равно количеству целых чисел, лежащих внутри интервала $(k; n)$. В свою очередь, количество целых чисел, принадлежащих интервалу $(k; n)$, на 2 меньше количества целых чисел, принадлежащих отрезку $[k; n]$, которое равно $n - k + 1$. Таким образом, количество целых чисел, принадлежащих отрезку $[a; 3a]$, равно

$$n - k - 1 = 3a + \mu - a + \lambda - 1,$$
$$n - k - 1 = 2a + \lambda + \mu - 1.$$

Поскольку $-1 < \lambda + \mu - 1 \le 1$, то количество целых чисел, принадлежащих отрезку с концами в точках a и $3a$, не превосходит $2a + 1$, или $2|a| + 1$.

Теперь рассмотрим случай $a < 0$. Количество целых чисел, принадлежащих отрезку $[3a; a]$, в силу соображений симметрии равно количеству целых чисел, принадлежащих отрезку $[-a; -3a]$, где $-a > 0$, $-3a > 0$. Как показано выше, это количество не превосходит $2 \cdot (-a) + 1$, или $2|a| + 1$.

Из условия задачи следует, что

$$a^2 + 2 \le 2|a| + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 2|a| + 1 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1. \end{array}\right.$$

При обоих полученных значениях параметра a наибольшее значение выражения $-x^2 + 2ax + 2$ равно 3, т.е. является целым неотрицательным числом. Таким образом, найденные значения параметра могут удовлетворять условию задачи.

Проверим выполнение условия задачи при $a = 1$ и при $a = -1$. При $a = 1$ наибольшее значение данного в условии выражения равно 3. Решением данного в условии неравенства является отрезок $[1; 3]$, содержащий три целых числа. Итак, условие задачи выполнено. При $a = -1$ наибольшее значение данного в условии выражения равно 3. Решением данного в условии неравенства является отрезок $[-3; -1]$, содержащий три целых числа. И в этом случае условие задачи выполнено.

Ответ: -1; 1.

Литература

1. *Майданов А.С.* Методология научного творчества. – М. : Издательство ЛКИ, 2008.

2. *Мирошин В.В.* Решение задач с параметрами. Теория и практика. М. : Экзамен, 2009.

3. *Мирошин В.В., Корешкова Т.А., Шевелева Н.В.* Типовые тренировочные тесты. – М. : Экзамен, 2009.