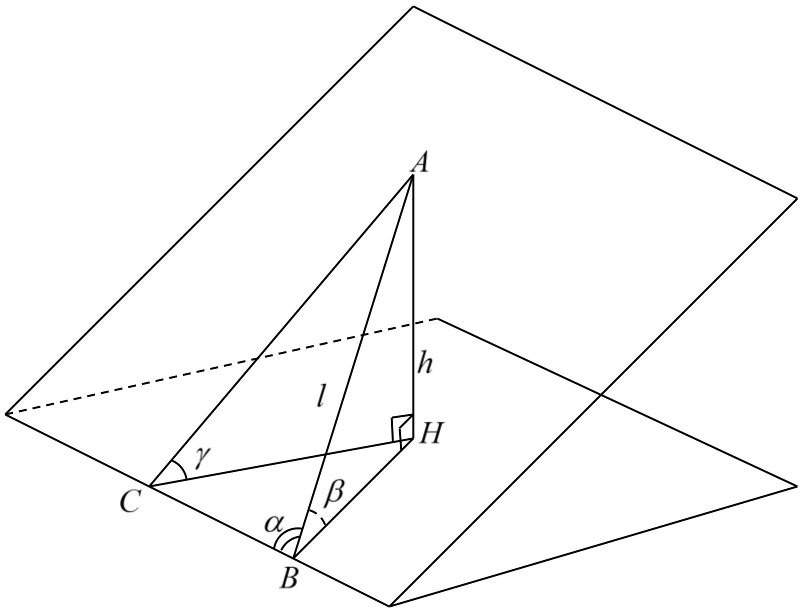
Теорема о трех синусах и другие креативные методы нахождения углов и расстояний в стереометрии.

(К решению задач С2 ЕГЭ по математике)

В задачах группы С ЕГЭ по математике, присутствует стандартный набор углов, меры которых находятся – угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, линейный угол двугранного угла. Существуют и стандартные методы нахождения соответствующих углов, которые в большинстве своем базируются на некоторых построениях. Однако существуют более креативные методы решения задач этой группы. Так для перечисленных выше углов существует теорема, объединяющая между собой все три эти объекта.

Теорема. *В одной из граней двугранного угла, равного γ, проведена прямая не параллельная его ребру и составляющая с ребром угол, равный α. Если $\beta-$угол между данной прямой и плоскостью грани двугранного угла её не содержащей, то* $\sin\beta=\sin\alpha\cdot\sin\gamma$.

Именно из-за вида формулы, отвечающей формулировке, теорема получила название «Теоремы о трех синусах».



Доказательство. Действительно, пусть $AB-$ прямая, проведённая в грани двугранного угла ACH. Опустим перпендикуляры $AH-$на вторую грань этого угла, $AC-$на ребро двугранного угла. Получим:

1) $\angle ACH=\gamma-$линейный угол двугранного угла,

2) $\angle ABC=\alpha-$угол между прямой и ребром двугранного угла ,

3) $\angle ABH=\beta-$угол наклона прямой AB к плоскости грани угла, её не содержащей.

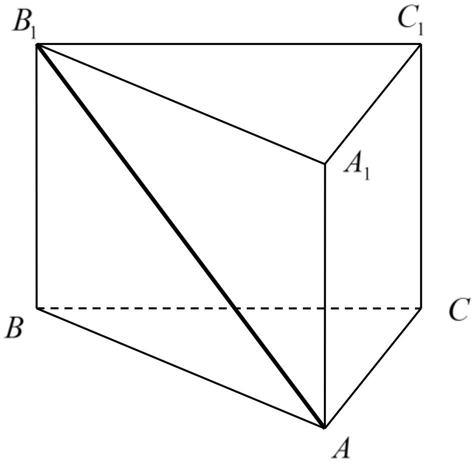
Обозначив длину отрезка $AB=l$, а длину перпендикуляра $AH=h$, получим, что $h=l\sin\alpha\cdot\sin\gamma$, а также, что $h=l\sin\beta$.

Из полученных равенств немедленно следует утверждение теоремы: $\sin\beta=\sin\alpha\cdot\sin\gamma$, что и нужно было доказать.

Следствие. *Длина перпендикуляра $AH-$расстояние от точки A, лежащей в одной из граней двугранного угла до плоскости второй грани. И* $AH=AB\cdot\sin\beta=AB\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma$.

Следствие дает возможность решать задачи на нахождение расстояния без построения самого перпендикуляра AH.

Задача 1. Боковые грани правильной треугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1-$ квадраты. Найдите угол между диагональю боковой грани AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

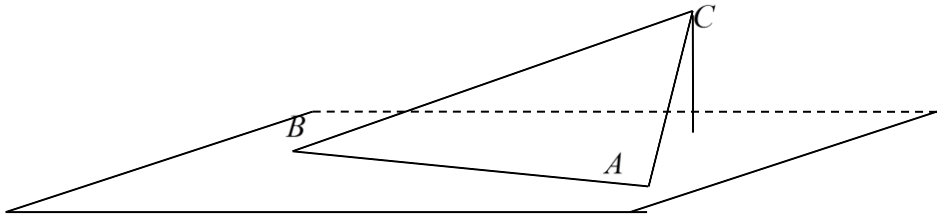


Решение. Обычно рекомендуется построить проекцию наклонной AB_1 на плоскость AA_1C_1C. Но рассматриваемая нами теорема избавляет от этой необходимости. Действительно: угол между AB_1 и ребром двугранного угла AA_1 равен $\frac{\pi}{4}$, линейный угол двугранного угла равен $\frac{\pi}{3}$. По теореме получим, что $\sin\beta = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Откуда $\beta = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Задача 2. (Ш-3918). Плоскость прямоугольного треугольника $ABC, \angle C = 90^0, AC = 3, BC = 4$ образует с плоскостью π угол, равный γ. Гипотенуза треугольника лежит в плоскости π. Найдите угол между меньшим катетом треугольника и плоскостью.

Решение.

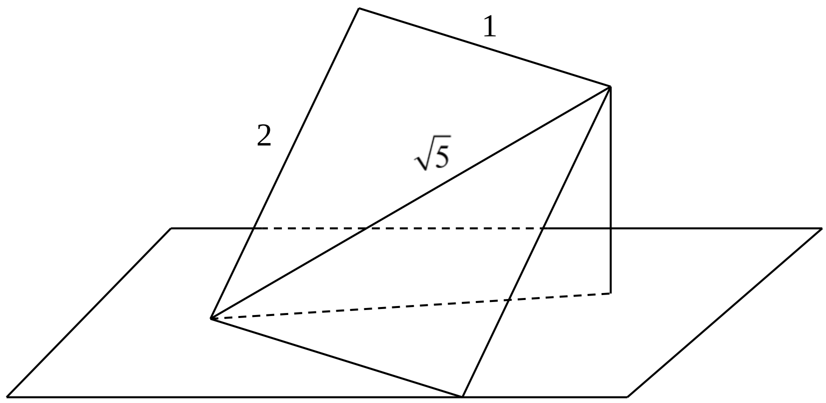


Обозначив угол между катетом AC и плоскостью π как β, получим, что $\sin\beta = \sin\gamma\cdot\sin\angle ABC = \frac{4}{5}\sin\gamma$. Следовательно, $\beta = \arcsin\left(\frac{4}{5}\sin\gamma\right)$

Ответ: $\beta = \arcsin\left(\frac{4}{5}\sin\gamma\right)$

Задача 3. (Ш-3919). Стороны прямоугольника равны 1 и 2. Меньшая сторона прямоугольника лежит в плоскости π, а диагональ прямоугольника образует с ней угол, равный β. Найдите угол между плоскостью π и плоскостью прямоугольника.

Решение.

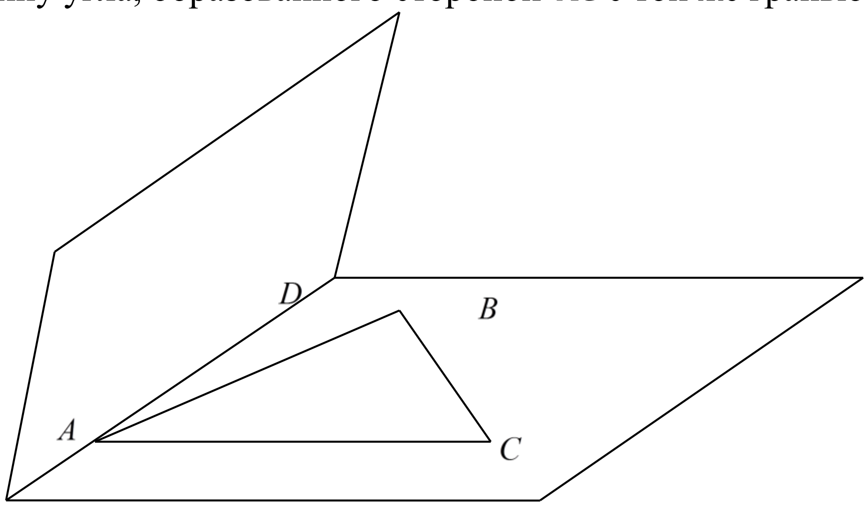


Теорема о трех синусах дает немедленное решение. $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\gamma \Leftrightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\beta\right)$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\sin\beta\right)$

Задача 4. (К-Т. Стереометрия-10, стр. 153)

В одной из граней двугранного угла, равного $\frac{\pi}{3}$ лежит треугольник ABC, причем вершина A треугольника принадлежит ребру двугранного угла. Сторона AB треугольника образует со второй гранью двугранного угла угол, равный $\frac{\pi}{6}$. Найдите величину угла, образованного стороной AC с той же гранью.



Решение. Обозначив острый $\angle BAD$, образованный стороной AB треугольника с ребром AD двугранного угла α, получим, что $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда угол, образованный стороной AC с ребром двугранного угла, будет равен $\frac{\pi}{3}+\alpha$. Таким образом, угол β, образованный стороной AC со второй гранью двугранного угла, находим из теоремы: $\sin\beta = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}+1}{4}$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}+1}{4}\right)$$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}+1}{4}\right)$

Задача 5. Угол между плоскостью квадрата $ABCD$ и некоторой плоскостью π равен α, а угол между стороной AB и этой плоскостью равен β. Найдите угол между стороной AD и плоскостью π.

Ответ: $\arcsin\left(\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}\right)$

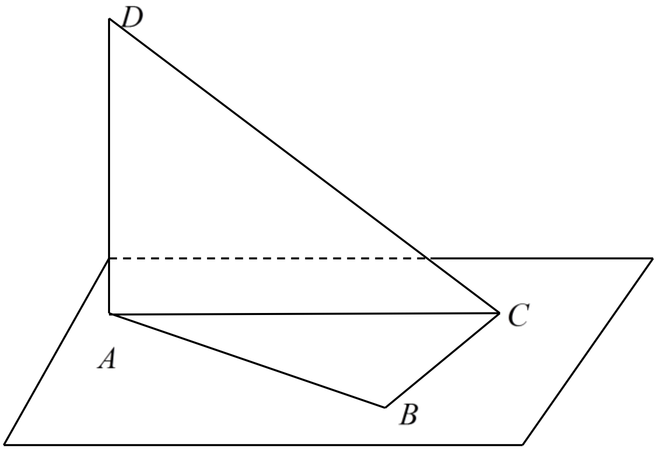
Задача 6. Стороны AB и AC равностороннего треугольника расположены соответственно в гранях π и π_1 острого двугранного угла, равного φ. Сторона AB образует с ребром двугранного угла острый угол α. Найдите величину угла между плоскостью треугольника ABC и плоскостью грани π_1.

Ответ: $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi\cdot\sin\alpha\right)$

Задача 7. (теорема о трех косинусах). Пусть $\beta-$угол между наклонной и плоскостью, $\alpha-$угол между этой наклонной и прямой l плоскости, $\varphi-$угол между проекцией наклонной на плоскость и прямой l. Докажите, что $\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\varphi$.

Задача 8. На плоскости π расположен равносторонний треугольник ABC со стороной a. На перпендикуляре к плоскости π в точке A отложен отрезок $AD=a$. Найдите угол между прямыми AB и CD.

Решение.



Так как $AD-$перпендикуляр к плоскости (ABC), то $AC-$проекция наклонной CD на эту плоскость, а $\angle DCA-$угол между наклонной и плоскостью. Из условия следует, что $\angle DCA=\frac{\pi}{4},\angle CAB=\frac{\pi}{3}$. По теореме о трех косинусах получим, что $\angle(AB,CD)=\alpha$ и $\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Таким образом, $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

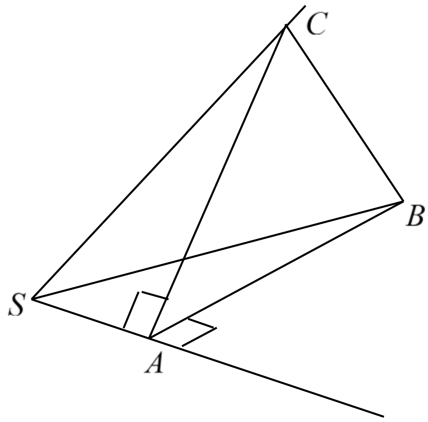
«Теорема о трех косинусах» является простым следствием более мощной теоремы, устанавливающей соотношения в таком элементе любого многогранника как трехгранный угол.

Первая теорема косинусов трехгранного угла.

Теорема. *Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других плоских углов трехгранного угла, сложенному с произведением синусов этих на косинус противолежащего ему двугранного угла.*

Таким образом: $\cos\alpha=\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\measuredangle A$.

Доказательство.



SC

Пусть трехгранный угол $SABC$ пересечен плоскостью, перпендикулярной ребру SA, причем эта плоскость пересекает ребра SB и .Используя ранее введенные обозначения, выразим квадрат длины отрезка BC.

Пусть $SA = a$, тогда: $AC = a\operatorname{tg}\beta,\ AB = a\operatorname{tg}\gamma,\ SC = \dfrac{a}{\cos\beta},\ SB = \dfrac{a}{\cos\gamma}$.

По теореме косинусов для треугольников, получим, что $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\cos\measuredangle A = a^2\operatorname{tg}^2\beta + a^2\operatorname{tg}^2\gamma - 2a^2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\cos\measuredangle A$

С другой стороны: $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB\cdot SC\cos\alpha = \dfrac{a^2}{\cos^2\beta} + \dfrac{a^2}{\cos^2\gamma} - \dfrac{2a^2}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha$.

Приравнивая найденные значения и используя формулу $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, приходим после всевозможных сокращений к равенству: $2 - \dfrac{2}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\alpha = -\dfrac{2\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}\cos\measuredangle A$, откуда, после умножения обеих частей на произведение $\cos\beta\cos\gamma$, получим требуемое утверждение: $\cos\alpha = \cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos\measuredangle A$.

Замечание. Теорема доказана в допущении, что плоскость, перпендикулярная ребру SA пересекает оба ребра SB и SC. Докажите это утверждение и в тех случаях, когда указанная плоскость не пересекает только ребро SB, т.е. $\gamma \ge \dfrac{\pi}{2}$, или когда указанная плоскость не пересекает ни одного из ребер SB и SC.

Указание. Отдельно надо рассмотреть случай когда один из углов или оба угла $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ или $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$. И когда один из них или оба – тупые.

Вторая теорема косинусов следует из первой, если вместо угла $SABC$ мы рассмотрим угол $S_1A_1B_1C_1$, построенный нами выше.

Для него: $\cos(\pi - \measuredangle A) = \cos(\pi - \measuredangle B)\cos(\pi - \measuredangle C) + \sin(\pi - \measuredangle B)\sin(\pi - \measuredangle C)\cos(\pi - \alpha)$.

Применяя формулы приведения, получим:

$\cos\measuredangle A = -\cos\measuredangle B\cos\measuredangle C + \sin\measuredangle B\sin\measuredangle C\cos\alpha$.

Откуда следует вторая теорема косинусов.

Теорема (вторая теорема косинусов для трехгранного угла)

Косинус двугранного угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух других двугранных углов , взятому с противоположным знаком, и сложенному с произведением синусов этих двугранных углов на косинус плоского угла, противолежащего данному двугранному углу.

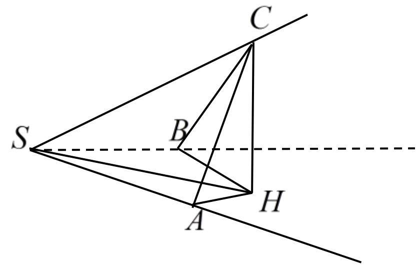
«Теорема о трех косинусах» мгновенно получается из общей формулировки первой теоремы косинусов для трехгранного угла, если положить, что двугранный угол – прямой.

Кроме двух теорем косинусов в теории трехгранного угла присутствует и теорема синусов, естественно, для трехгранного угла.

Теорема синусов трехгранных углов.

Синусы плоских углов трехгранного угла пропорциональны синусам противолежащих им двугранных углов.

Т.е. в наших обозначениях для трехгранного угла $SABC$ получим: $\frac{\sin\alpha}{\sin\measuredangle A}=\frac{\sin\beta}{\sin\measuredangle B}=\frac{\sin\gamma}{\sin\measuredangle C}$



Доказательство. Отложим на ребре трехгранного угла , например, на ребре SC, произвольный отрезок $SC=c$ и опустим перпендикуляр CH на плоскость грани (ASB). Причем, именно на плоскость – от расположения точки H ничего зависеть не будет.

Используя теорему о трех перпендикулярах, построим линейные углы двугранных углов при ребрах SA и SB: $\angle CAH=\measuredangle A,\ \angle CBH=\measuredangle B$.

Тогда последовательно рассматривая пары прямоугольных треугольников $\triangle CAS$ и $\triangle CAH$, а также $\triangle CBS$ и $\triangle CBH$, получим, что $CH=c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\measuredangle B=c\cdot\sin\beta\cdot\sin\measuredangle B=c\cdot\sin\angle CSH$.

Из равенства $c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\measuredangle B=c\cdot\sin\beta\cdot\sin\measuredangle B$ получим, что $\frac{\sin\alpha}{\sin\measuredangle A}=\frac{\sin\beta}{\sin\measuredangle B}$.

Аналогично доказывается, что $\frac{\sin\alpha}{\sin\measuredangle A}=\frac{\sin\gamma}{\sin\measuredangle C}$, откуда следует, что $\frac{\sin\alpha}{\sin\measuredangle A}=\frac{\sin\beta}{\sin\measuredangle B}=\frac{\sin\gamma}{\sin\measuredangle C}$.

Теорема доказана.

Следствие. Если двугранные углы трехгранного угла равны, то противолежащие им плоские углы либо равны, либо дополняют друг друга до π.

Следствие. **Теорема о трех синусах**.

Заметим, что $\angle CSH$ – это угол наклона прямой CS к плоскости (SAH).

Из полученного равенства $CH=c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\measuredangle B=c\cdot\sin\beta\cdot\sin\measuredangle B=c\cdot\sin\angle CSH$ имеем, что $\sin\beta\cdot\sin\measuredangle B=\sin\angle CSH=\sin\varphi$, что доказывает следующую теорему.

Теорема о трех синусах.

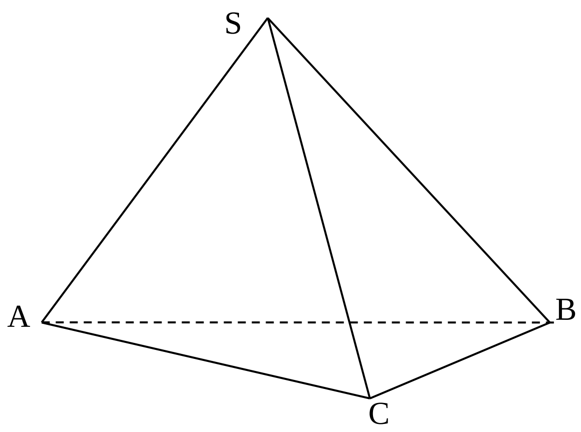
Если прямая, лежащая в одной из граней двугранного угла, равного $\measuredangle B$, составляет с его ребром угол β, а с плоскостью второй грани угол φ, то $\sin\beta\cdot\sin\measuredangle B=\sin\varphi$.

Очевидно, что это та же теорема о трех синусах, записанная в других обозначениях.

Задача 9. Найдите угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если угол между ее боковыми гранями равен φ (10.8, Ш. 4120)[1].

Решение. Так как все плоские углы трехгранного угла $SABC$ равны, то равны и противолежащие им двугранные углы. Поэтому все равно, какой из них находить. Пусть это будет $\measuredangle A$.

[1] ЕГЭ 2012. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2 (С)./И.Р.Высоцкий и др. М.: Издательство «Экзамен», 2012.



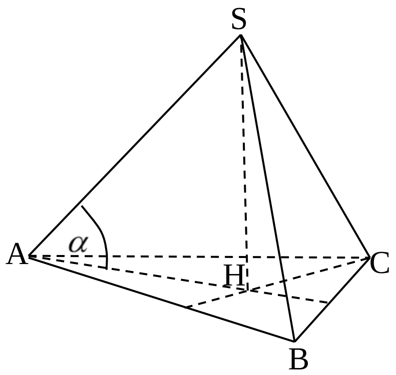
Имеем:

$$\cos\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos\measuredangle A \Leftrightarrow \cos\measuredangle A = \frac{\cos\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

Сам $\measuredangle A = \arccos\dfrac{\cos\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$

Ответ: $\arccos\dfrac{\cos\varphi - \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$

Задача 10(4115).Угол бокового ребра с плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен α. Найдите угол между боковыми гранями.



Решение. Рассмотрим сначала трехгранный угол $ASHB$, в котором $\measuredangle H = \dfrac{\pi}{2}, \angle HAB = \dfrac{\pi}{6}, \angle SAH = \alpha$. Обозначив $\angle SAB = \beta$, получим, что $\cos\beta = \cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{6} + \sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\measuredangle H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$.

Далее, уже для угла $ACSB$, получим, что $\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos^2\beta + \sin^2\beta\cos\measuredangle S = \dfrac{3}{4}\cos^2\alpha + \left(1 - \dfrac{3}{4}\cos^2\alpha\right)\cos\measuredangle S$

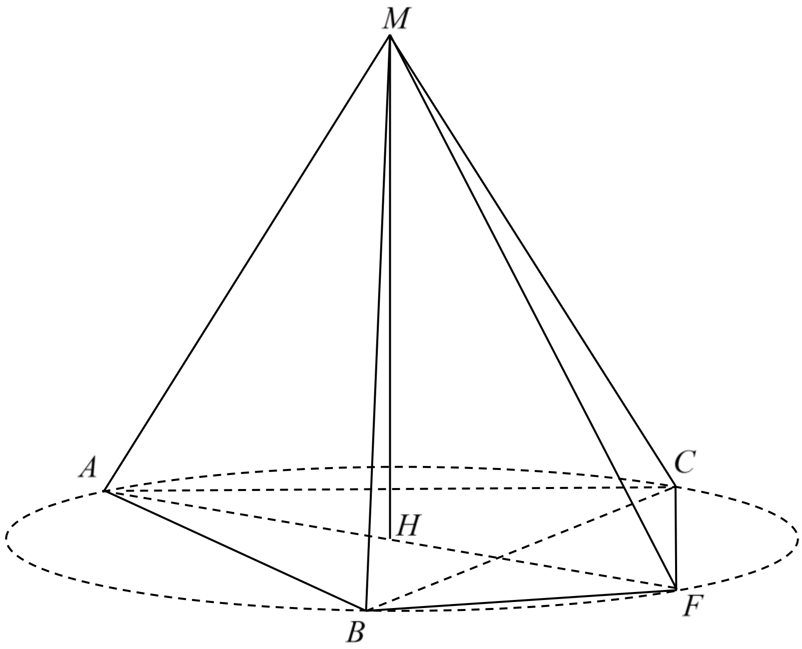
Окончательно получим, что $\cos\measuredangle S = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cos^2\alpha}{1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha} = \dfrac{2 - 3\cos^2\alpha}{4 - 3\cos^2\alpha}$

$$\measuredangle S = \arccos\frac{2 - 3\cos^2\alpha}{4 - 3\cos^2\alpha}$$

Ответ: $\arccos\dfrac{2 - 3\cos^2\alpha}{4 - 3\cos^2\alpha}$

Задача 10 (ЕГЭ – 2008, С 4).

Дан конус с вершиной M, радиус основания которого равен R. Из вершины конуса проведены три образующие MA, MB, MC так, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = \alpha$. На дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A, выбрана точка F так, что объём пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки F до плоскости AMB.



Решение. Боковые грани AMB, BMC, CMA – равные равнобедренные треугольники, поэтому $AB = BC = CA$. Таким образом, треугольник ABC – равносторонний. При любом расположении точки F высота пирамиды остается неизменной, поэтому ее объём будет наибольшим, если площадь четырехугольника $ABFC$ будет наибольшей. Но длина одной из диагоналей четырехугольника – BC также неизменна в условиях задачи.

Имеем, что $S_{ABFC} = \frac{1}{2} BC \cdot AF \cdot \sin\angle(AF, BC) \le \frac{1}{2} BC \cdot AF \le \frac{1}{2} BC \cdot 2R$.

Наибольшее значение площади достигается, если AF будет диаметром окружности основания конуса, перпендикулярным хорде $BC = R\sqrt{3}$.

Отрезок AF, расположенный в плоскости $ABCF$, образует угол $\frac{\pi}{6}$ с ребром двугранного угла, второй гранью которого является плоскость AMB. Найдем двугранный угол γ при ребре AB.

По теореме косинусов для трехгранного угла с вершиной A имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно: $\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Используя то, что расстояние от точки F до плоскости AMB равно $d = AF\sin\frac{\pi}{6}\sin\gamma$, получим: $d = 2R \cdot \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = R\sqrt{1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $R\sqrt{1 - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.