**В.В. Мирошин,**
Гимназия № 1522 (Москва),
e-mail: vmiroshin@gmail.com

**Делимость натуральных чисел в задачах С6 единого государственного экзамена по математике.**

*В статье рассматриваются задачи группы С6, предлагаемые на ЕГЭ по математике и в тренировочных работах, основанные на теории чисел, в частности на понятии делимости, наибольшего общего делителя, решении уравнений в целых числах. Статья будет служить хорошим подспорьем при подготовке к ЕГЭ по математике.*

Ключевые слова: *натуральные числа, решение уравнений в целых числах, параметры.*

Первые числа, с которыми сталкивается любой учащийся, приступающий к изучению математики – это натуральные числа. Одно из определений множества этих чисел – числа, используемые при счете предметов. Множество натуральных чисел обычно обозначается символом $N=\{1\ ,\ 2\ ,\ 3,\ ....\}$. Среди натуральных чисел есть наименьший элемент, но нет наибольшего. Наименьший элемент, т.е. наименьшее натуральное число – единица – играет огромную роль в построении теории чисел.

Определение. Будем говорить, что натуральное число $n$ делится на натуральное число $m$, если найдется такое натуральное число $k$, что $n=m\cdot k$.

Числа $m$ и $k$ называются делителями натурального числа $n$. Очевидно, что любое натуральное число, кроме единицы, имеет, как минимум, два делителя – единицу и самого себя, т.к. $n=1\cdot n$.

Делители натурального числа $n$, отличные от единицы и самого числа $n$, называются собственными делителями, а $1$ и $n$ – несобственными делителями натурального числа.

Числа, имеющие собственные делители называются составными, а имеющие только несобственные делители – простыми. Сразу отметим, что первое натуральное число, т.е. единица, не относится ни к простым, ни к составным, в силу ее уникальности.

**1. Составные числа в задачах.**

Понятия делителя и разложимости натурального числа на множители – одна из наиболее часто используемых понятий в решении задач по теории чисел. Однако, следует помнить, что число может быть разложено и в произведение отрицательных сомножителей, что увеличивает количество вариантов решения.

**Задача 1**. Решите уравнение в натуральных числах $xy-7y+3x=39$.

Решение. Применяя метод группировки, получим, что

$$xy-7y+3x=39 \Leftrightarrow y(x-7)+3(x-7)+21=39 \Leftrightarrow (x-7)(y+3)=50.$$

Записанное уравнение означает, что число $50$ разложено в произведение двух своих делителей. Из требования натуральности решения, получим, что второй сомножитель – положительное число, большее 3. Следовательно, и первый сомножитель должен быть положителен. Учитывая все условия, получим, что $50=1\cdot 50=2\cdot 25=5\cdot 10=10\cdot 5$. Таким образом, уравнению будут удовлетворять четыре пары натуральных чисел: $(8\ ;\ 43),\ (9;\ 22),\ (12\ ;\ 7),\ (17\ ;\ 2)$.

Ответ: $(8\ ;\ 43),\ (9;\ 22),\ (12\ ;\ 7),\ (17\ ;\ 2)$.

Задача 2[1]. Решите уравнение в натуральных числах $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{9}$, $x>y$.

Решение. Так искомые числа – натуральные, то умножая обе части уравнения на общий знаменатель дробей, стоящих в его левой части, получим $9x+9y=xy \Leftrightarrow x(y-9)-9(y-9)-81=0 \Leftrightarrow (x-9)(y-9)=81$. Таким образом, в результате нехитрой группировки, получено, что натуральное число 81разложено в произведение двух множителей, первый из которых больше второго. Имеем: $81=81\cdot 1=27\cdot 3=(-1)\cdot(-81)=(-3)\cdot(-27)$. Но так как требуется решить уравнение в натуральных числах, то получим, что решением являются две пары натуральных чисел: $(90\,;10)$, $(36\,;12)$.

Ответ: $(90\,;10)$, $(36\,;12)$.

**Задача 3**. Решите уравнение в натуральных числах $x^2-3xy+2y^2=3$.

Решение. Как и в предыдущих случаях разложим левую часть уравнения на множители, рассматривая ее как квадратный трехчлен относительно переменной $x$ с параметром $y$. Имеем: $x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)=13$. Получим четыре возможных разложения числа $13=1\cdot 13=13\cdot 1=(-1)\cdot(-13)=(-13)\cdot(-1)$. Составляя системы уравнений, получим, что:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-12 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y=13 \\ x-2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=12 \end{cases},$$
$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x-2y=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=12 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y=-13 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-25 \\ y=-12 \end{cases}.$$

Только два набора значений переменных отвечают условию натуральности решений.

Ответ: $(11\,;12)$, $(25\,;12)$.

**2. Делители натурального числа. Количество делителей натурального числа.**

Наиболее важной теоремой в теории чисел является теорема, называемая «основной теоремой арифметики».

Теорема. Любое натуральное число можно единственным образом разложить в произведение его простых делителей.

Представление натурального числа в виде $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{k_l}$, где $p_1,p_2,\ldots,p_l$ – простые делители числа, а $k_1,k_2,\ldots,k_l$ – степени, с которыми простые делители входят в разложение (их еще называют кратностями), называется каноническим разложением натурального числа. Для того чтобы можно было соблюсти единственность разложения, единица исключается из числа простых чисел.

**Формула количества делителей числа натурального числа $n$.**

Всякий делитель натурального числа $n$, каноническое разложение которого задано формулой $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{k_l}$, может быть представлен в виде $m=p_1^{i_1}\cdot p_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{i_l}$, где кратность каждого делителя, выбираемого в произведение, может меняться от 0, т.е. вместо делителя стоит 1, до максимальной кратности этого делителя. Поэтому первый сомножитель, входящий в делитель $m$, мы можем выбрать $k_1+1$способом, второй - $k_2+1$способом, и т.д. Последний сомножитель в делителе $m$ мы можем выбрать $k_l+1$

[1] Самое полное издание типовых вариантов заданий ЕГЭ 2010: Математика. Общая редакция: А.Л.Семенов, И.В.Ященко. М.: АСТ : Астрель 2010.

способом. Вспоминая правило умножения при выборе элементов из каких либо множеств[2], получим, что количество способов написания делителя числа $n$, а, следовательно, и собственно их количество, задается формулой $\tau(n)=(k_1+1)(k_2+1)\cdot.....\cdot(k_l+1)$.

**Задача 4** (Тренировочный вариант ЕГЭ-2010).

Натуральное число $n$ делится на 42 и имеет 42 делителя. Найдите все такие натуральные числа.

Решение. Пусть $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot.....\cdot p_l^{k_l}$ – каноническое разложение искомого числа. Количество его делителей задается формулой: $\tau(n)=(k_1+1)(k_2+1)\cdot.....\cdot(k_l+1)$. Так как число делится на 42, то его можно записать в виде $n=42m=2\cdot3\cdot7\cdot m$, из чего следует, что простые делители 2,3 и 7 заведомо входят в его каноническое разложение. С другой стороны получим, что $\tau(n)=42=(k_1+2)(k_2+2)(k_3+2)(k_4+1)...$, где $k_1,k_2,k_3$ – кратности, с которыми простые делители входят в разложение числа $m$. Снова получим, что число 42 разложено в произведение нескольких натуральных делителей, из которых 3, как минимум, не меньше 2. Но разложение на такие множители единственно: $42=2\cdot3\cdot7$. Поэтому $\tau(n)=42=(k_1+2)(k_2+2)(k_3+2)=2\cdot3\cdot7$. Таким образом, получим, что возможны 6 вариантов (количество перестановок $3!=6$) разложения, при каждом из которых значения 2, 3 или 7 принимают сомножители в разложении числа делителей $\tau(n)$. Получим, что наборы кратности $(k_1,k_2,k_3)$ могут быть следующими: $(0,1,5),(0,5,1),(1,0,5),(1,5,0),(5,0,1),(5,1,0)$. Учитывая, что это кратности, с которым делители 2, 3, 7 входят в разложение множителя $m$, получим, что числа $n=2\cdot3\cdot7\cdot m$, обладающие указанными в условии свойствами, могут быть равны $2^1\cdot3^2\cdot7^6$, $2^1\cdot3^6\cdot7^2$, $2^2\cdot3^1\cdot7^6$, $2^2\cdot3^6\cdot7^1$, $2^6\cdot3^1\cdot7^2$, $2^6\cdot3^2\cdot7^1$.

Ответ: $2^1\cdot3^2\cdot7^6$, $2^1\cdot3^6\cdot7^2$, $2^2\cdot3^1\cdot7^6$, $2^2\cdot3^6\cdot7^1$, $2^6\cdot3^1\cdot7^2$, $2^6\cdot3^2\cdot7^1$.

**Делители натурального числа. Формула суммы делителей.**

Умение находить количество и, самое главное, вид любого делителя натурального числа, зная его каноническое разложение, позволяет находить и сумму этих делителей. Кстати, еще древними греками было введено понятие совершенного числа – числа, равного сумме своих делителей, не включая само число.

Если число $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot.....\cdot p_l^{k_l}$, то сумма его делителей, включая и само это число, может быть найдена по формуле:

$$S(n)=\left(1+p_1+...+p_1^{k_1}\right)\left(1+p_2+...+p_2^{k_2}\right)\cdot....\cdot\left(1+p_l+...+p_l^{k_l}\right)=\prod_{i=1}^{l}\left(\frac{p_i^{k_i+1}-1}{p_i-1}\right)$$

**Задача 5** (Тренировочный вариант ЕГЭ-2010).

Найдите натуральное число $N$, имеющее 6 делителей, сумма которых равна 104.

**Решение**. По формуле количества делителей $\tau(N)=(k_1+1)(k_2+1)\cdot.....\cdot(k_l+1)=6=2\cdot3$. Следовательно, число $N$ имеет два простых делителя и имеет вид $N=p_1\cdot p_2^2$, сумма делителей равна $(1+p_1)(1+p_2+p_2^2)=104$. Так как 104 не делится ни на 3, ни на 7, то ни один из простых делителей не равен 2.

Разложим 104 на два множителя, большие 3.

$104=4\cdot26=8\cdot13$. В первом случае $p_1=3$, но $p_2$ – не существует. Во втором случае $p_1=7,\ p_2=3$.

[2] Ященко И.В. и др. Теория вероятности. Учебник

Следовательно, $N = 7 \cdot 3^2 = 63$.
**Ответ**: 63
**Деление с остатком**

Формула деления одного натурального числа на другое натуральное число по сути самая используемая при решении задач. Формула деления натуральных чисел с остатком – формула начальной школы, поэтому трудно представить, что именно обращение к ней в большом количестве случаев может привести к решению.

Определение. Разделить натуральное число $n$ на натуральное число $m$ с остатком – это значит представить число $n$ в виде $n = c \cdot m + r$, где $c$ и $r$ – целые неотрицательные числа, причем $0 \le r < m$.

Следствие. При делении натуральных чисел на натуральное число $m$ остаток может принимать ровно $m$ значений: $0, 1, \ldots, m-1$. В частности условие делимости числа $n$ на $m$ означает, что остаток от деления равен нулю.

**Задача 6.** (Тренировочный вариант ЕГЭ-2011).
Решите в натуральных числах уравнение $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!,\ (1! = 1,\ l! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot l)$.

Решение. Записав уравнение в виде $2(k! + n!) = m!$, получим, что $k \le n < m$ или $n \le k < m$.
Если $k = n$, то уравнение запишется в виде $4k! = m!$, что после сокращения на меньшее произведение $k!$, даст следующее равенство: $4 = (k+1) \cdot \ldots \cdot m$. Получим, что число 4 делится на $k+1$. Так как $k$ – натуральное число, то $k+1 = 2$ или $k+1 = 4$, т.е. $k = 1$ или $k = 3$.
В первом случае имеем $4 \cdot 1! = m!$. Это уравнение решений не имеет.
Во втором случае $4 \cdot 3! = m!$, т.е $m = 4$. Следовательно, тройка натуральных чисел $(3\,;\,3\,;\,4)$ – решение задачи.

Если $k \ne n$, то пусть $k < n$. Противоположный случай рассматривать не надо – достаточно заметить, что если тройка чисел $(k_0,\ n_0,\ m_0)$ – решение, то $(n_0, k_0,\ m_0)$ – тоже. Получим: $2(k! + n!) = m! \Leftrightarrow 2k!(1 + (k+1)\ldots n) = m! \Leftrightarrow 2(1 + (k+1)\ldots n) = (k+1)\ldots m$.
Число, стоящее в скобках в левой части уравнения имеет вид $c \cdot (k+1) + 1$, т.е. на $(k+1)$ не делится. Но все число, стоящее в левой части уравнения делится на $(k+1)$. Поэтому получим, что 2 делится на $(k+1)$. Аналогично, число, стоящее в скобках, не делится на $n$, а все произведение в левой части уравнения – делится. Следовательно, 2 делится и на $n$. Это возможно, если только $n = k+1 = 2$. Но тогда $m = 3$. Получим, что тройки чисел $(1\,;\,2\,;\,3)$ и $(2\,;\,1\,;\,3)$ – решения уравнения.

Ответ: $(1\,;\,2\,;\,3), (2\,;\,1\,;\,3), (3\,;\,3\,;\,4)$.

**Четность и нечетность.**

Простейшим случаем деления с остатком является определение четности и нечетности натурального или целого числа. Действительно, число, делящееся на 2 – четное, а не делящееся на 2 – нечетное. Формула четного числа $n = 2m$, а формула нечетного числа $n = 2m+1$.

**Задача 7** (Вариант ЕГЭ 2010).
Перед каждым из чисел 6,7,…,10 и 14,15,….,20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все полученные 35 результатов складывают. Какую наибольшую и какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге?

Решение. Каждое из чисел первого набора, взятое с выбранным знаком, будет сложено с каждым числом второго набора, перед которым также будет стоять выбранный знак. Это означает, что каждое число первого набора будет повторено в сумме такое количество раз, сколько чисел во втором наборе, а каждое число второго набора – столько раз, сколько числе в первом наборе.

Получим, что сумма $S-$это одно из чисел $7\left(\pm6\pm7\pm...\pm10\right)+5\left(\pm14\pm15\pm...\pm20\right)$, которое может быть получено выбором знаков. Очевидно, что максимальной сумма будет, если все слагаемые будут положительны, т.е. $S_{\max}=7\left(6+7+...+10\right)+5\left(14+15+....+20\right)=280+595=875$.

Нахождение минимальной по модулю суммы основано на следующем: при изменении знака любого слагаемого с положительного на отрицательный, максимальная сумма уменьшается на четное число. Действительно, если $p-$одно из чисел, то $p-\left(-p\right)=p$, а произведение четного числа на четное или нечетное число – четное. Поэтому с изменением знаков слагаемых сумма будет меняться, оставаясь нечетной. Меньший модуль нечетного числа равен единице, следовательно, можно предположить, что наименьшая по модулю сумма также может равняться единице. Но это нужно доказать хотя бы подбором.

Например, $7\cdot(6-7+8-9+10)+5\left(-14-15+16-17+18+20\right)=7\cdot8+5\left(-11\right)=1$

Надо отметить, что искомая сумма будет являться решением диофантового уравнения вида $7k+5n=\pm1$, где, к тому же, $k-$четно, а $m-$нечетно.

Ответ: 875, 1.

Задача 8 (Тренировочный вариант ЕГЭ-2010).

Каждое из чисел из набора $2,3,....7$ умножают на каждое из чисел набора $13,14,...,21$, и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус. После чего все 54 полученных результата складывают. Какую наибольшую и какую наименьшую по модулю сумму можно получить в итоге.

Решение. Рассуждая также как при решении предыдущей задачи, получим, что максимальная сумма получится, если перед каждым произведение поставить плюс.

$S_{\max}=\left(2+3+....+7\right)\left(13+14+....+21\right)=27\cdot153=4131$.

При изменении произведения с $+pq$ на $-pq$ конечная сумма уменьшится на четное число $2pq$, оставаясь при этом нечетной.

Значение 1 модуль суммы принимает , например, при такой расстановке знаков, когда оба сомножителя, задающие сумму будут равны 1 или $-1$.

Например: $\left(-2+3-4+5+6-7\right)\left(13+14+15+16-17+18-19-20-21\right)=1\cdot\left(-1\right)=-1$.

Ответ: $4131$; $1$