Разговор после семинара: «Проблемы и пути их преодоления при решении задач группы С2».

Богатова Елена Юрьевна,
Пичина Ольга Викторовна,
учителя математики высшей квалификационной категории ГБОУ гимназии №1522

Введение

Поводом для написания данной статьи послужило обсуждение вопросов семинара по решению задачи С2 при встречах с учителями математики СЗОУО. После семинара в гимназии №1522 коллеги выразили желание получить материалы данного семинара. Учителя округа, которые работают в старшей школе приходили в гимназию за советом, консультацией по данной проблематике.

Не секрет, что ситуация, сложившаяся с преподаванием стереометрии в российских школах, непростая. Однако стереометрическая задача разработчиками КИМов позиционируется как задача для большинства успевающих учеников, а не только для избранных. Как правило, в задаче нужно найти длину отрезка, площадь, угол (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанные с призмой, с пирамидой, цилиндром, конусом или шаром. Дополнительные построения минимальны (например, построение линейного угла «хорошего» двугранного угла и т.д.).

Но практика показывает, что справляются с этой задачей далеко не все успевающие ученики.

По результатам ЕГЭ 2011 года ненулевые баллы за выполнение задания С2 получили 11,6% участников. В 2012 году – 14%. Примерный процент решений, оцененных максимальным числом баллов – 4%. Конечно, хорошо успевающих по математике учеников гораздо больше, чем указанных в процентном соотношении данных.

Для положительной оценки ученик должен понять условие задачи, верно изобразить (построить чертеж), верно описать, обосновать положение искомого угла или расстояния.

Опыт показывает, что большинство одиннадцатиклассников понимают простой стереометрический чертеж, могут его использовать для установления взаимного расположения (принадлежность, параллельность или перпендикулярность) прямых и плоскостей, а также при нахождении длины наклонной и ее проекции. Но задача С2 не является одношаговой задачей. Самым сложным для учащихся бывает найти искомую планиметрическую конструкцию по данному условию.

В арсенале учащегося есть способы решения стереометрической задачи: геометрический; координатный; векторный.

Наиболее часто при решении задач учащиеся применяют геометрический и координатный методы решения задач. Векторный способ остается без должного внимания. На то есть причины. Так в планировании стереометрии 10 класса по УМК Л.С. Атанасяна данный метод рассматривается в конце учебного года в объеме 6 часов, включая контрольную работу. Кроме того, векторный способ является трудоемким в применении. Но научить этому методу ученика обязательно нужно. Ведь применяя этот способ, ученики избегают многих неприятностей, таких как :

- определение точного места нахождения основания перпендикуляра при определении расстояния от точки до плоскости;
- выполнение точного построения угла между прямой и плоскостью;
- точного построения линейного угла между двумя плоскостями на чертеже и т.д.

Приведем критерии оценивания выполнения задания С2, которых следует придерживаться при проверке работ выпускников.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен правильный ответ	2
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Ученик должен продемонстрировать наличие развернутых и полных обоснований всех конструкций и построений (два балла). Если ученик в своем решении ограничивается лишь верным рисунком, указал искомый объект и не привел сколько-нибудь развернутых вычислений, то это оценивается одним баллом. Бывает другая ситуация, когда геометрически задача решена верно, верно использованы формулы аналитической стереометрии, но в вычислениях содержится арифметическая ошибка, тогда задача оценивается одним баллом.

Набор теоретических сведений, которые предлагается считать известными

Приведем методические обоснования, которые можно применять при подготовке учащихся к ЕГЭ по решению стереометрических задач.

Задачи, в которых требуется вычислить те или иные расстояния или углы в плоскости или в пространстве, удобно решать, используя скалярные произведения векторов.

Напомним, что скалярное произведение двух ненулевых векторов вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если хотя бы один из сомножителей – нулевой вектор, то скалярное произведение равно нулю.

Отметим важные для геометрических приложений свойства скалярного произведения.

1. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

2. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины, т. е. длина вектора равна арифметическому квадратному корню из его скалярного квадрата.

3. Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. вычисляется по формуле

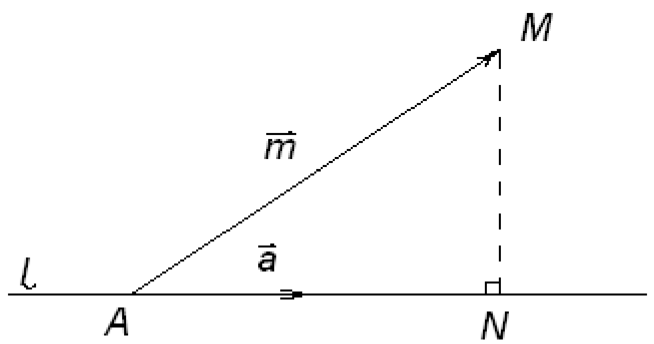
$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Задав на плоскости пару неколлинеарных векторов – базис, можно любой вектор плоскости единственным образом разложить по этому базису. В пространстве базис состоит из трех некомпланарных векторов.

Можно выделить четыре типа задач на вычисление расстояний и углов.

1. Расстояние от точки до прямой

Дана точка M, прямая l с направляющим вектором $\vec{a}$, точка A на прямой l, $\vec{AM}=\vec{m}$. Требуется найти расстояние от точки M до прямой l. Приведем схему решения этой задачи.



Пусть N – ортогональная проекция точки M на прямую l. Тогда $\vec{MN}=\vec{AN}-\vec{AM}=x\vec{a}-\vec{m}$.

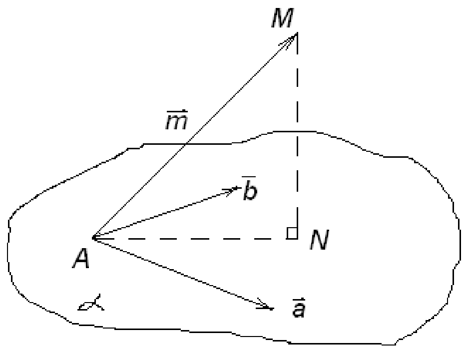
Неизвестный коэффициент x находится из условия перпендикулярности векторов $\vec{MN}$ и $\vec{a}$: $(x\vec{a}-\vec{m})\cdot\vec{a}=0$.

Искомое расстояние равно $|\vec{MN}|=\sqrt{(x\vec{a}-\vec{m})^2}$

2. Расстояние от точки до плоскости. Угол между прямой и плоскостью

Дана плоскость α с базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$ точка A в плоскости α, точка M вне плоскости α, $\vec{AM}=\vec{m}$. Требуется найти расстояние от точки M до плоскости α

и угол между прямой AM и плоскостью α. Схема решения задачи такова. Пусть N – ортогональная проекция точки M на плоскость α.



Тогда $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}$

Неизвестные коэффициенты x и у находятся из условий перпендикулярности вектора $\vec{MN}$ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

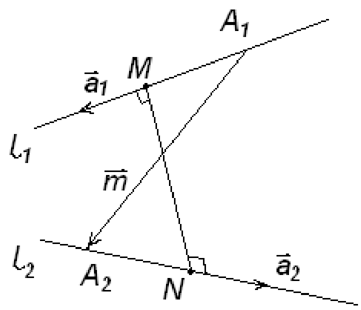
$$\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$$

Зная x и y, мы находим расстояние от точки М до плоскости α, равное $MN = \sqrt{(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m})^2}$.

Если $x\vec{a} + y\vec{b} \neq \vec{0}$, то косинус угла между прямой AM и плоскостью α равен модулю косинуса угла между векторами $\vec{m}$ и $x\vec{a} + y\vec{b}$, а если $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$, то прямая AM перпендикулярна плоскости α. Отметим, что угол между прямой и плоскостью можно найти иначе, если заметить, что $\angle MAN$ = 90° - $\angle AMN$ и, следовательно, синус угла между прямой AM и плоскостью α равен модулю косинуса угла между векторами $\vec{AM}$ и $\vec{MN}$.

3. Расстояние и угол между скрещивающимися прямыми

Рассмотрим следующую задачу. Даны прямая l_1 с направляющим вектором $\vec{a}_1$, точка A_1 на прямой l_1, прямая l_2 с направляющим вектором $\vec{a}_2$, точка A_2 на прямой l_2, $\vec{A_1A_2} = \vec{m}$. Требуется отыскать расстояние и угол между l_1 и l_2.



Такого рода задача решается по следующей схеме. Косинус угла находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}$$

Чтобы определить расстояние между l_1 и l_2 , т. е. длину их общего перпендикуляра MN (M лежит на l_1, N лежит на l_2), представим $\vec{MN}$ в виде

$$\vec{MN} = \vec{MA_1} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2N} = x\vec{a}_1 + \vec{m} + y\vec{a}_2$$

Неизвестные коэффициенты x и y находятся из условий перпендикулярности вектора $\vec{MN}$ векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$\begin{cases} (x\vec{a}_1 + \vec{m} + y\vec{a}_2) \cdot \vec{a}_1 = 0, \\ (x\vec{a}_1 + \vec{m} + y\vec{a}_2) \cdot \vec{a}_2 = 0. \end{cases}$$

Искомое расстояние – длина вектора $\vec{MN}$, т.е. $MN = \sqrt{(x\vec{a}_1 + \vec{m} + y\vec{a}_2)^2}$

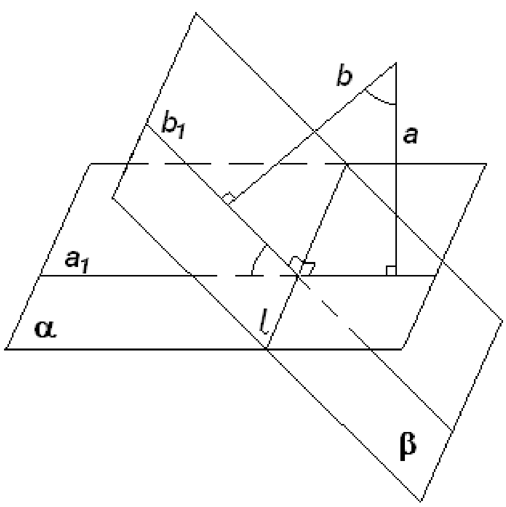
4. Угол между плоскостями

Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми. Действительно, пусть плоскости α и β пресекаются по прямой l (для параллельных или совпадающих плоскостей сформулированное условие очевидно). Через какую-нибудь точку, не принадлежащую плоскостям α и β, проведем прямые a и b, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно.

Тогда плоскость, проходящая через прямые a и b пересекает плоскости α и β по прямым a_1 и b_1, перпендикулярным прямой l. Угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a_1 и b_1, который в свою очередь, равен углу между a и b, т. к. прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости и $a \perp a_1$, $b \perp b_1$.

Таким образом, задача нахождения угла между плоскостями сводится к вычислению угла между прямыми. Если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - ненулевые векторы, перпендикулярные плоскостям α и β соответственно, то они являются направляющими векторами прямых, перпендикулярных плоскостям α и β, так что угол φ между этими плоскостями находится их равенства

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}$$



Приведем примеры решения задач данным способом.

Задача 1

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1. Точка M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная призма,

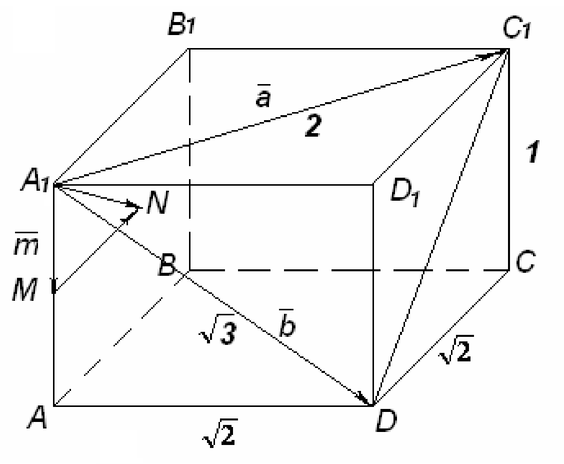
$AB = \sqrt{2}$,

$AA_1 = 1$,

$AM = MA_1$

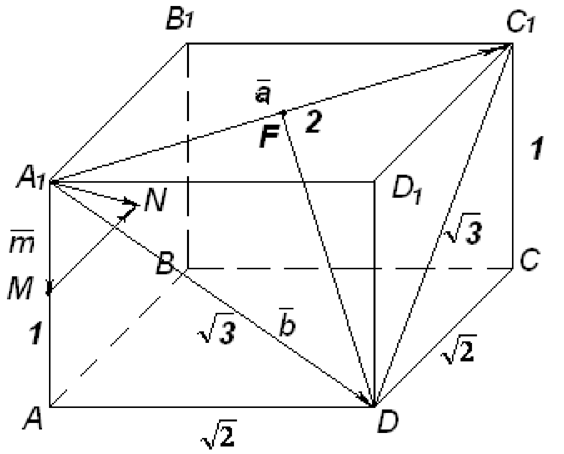
Найти: $\rho(M;(DA_1C_1))$

Решение:



1) $\rho(M;(DA_1C_1)) = MN$, где $MN \perp (DA_1C_1)$, $N \in (DA_1C_1)$

2) пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - базисные векторы плоскости (DA_1C_1)



Используя правило сложения векторов, получаем векторное равенство

$$\vec{MN} = \vec{MA_1} + \vec{A_1N} = \vec{A_1N} - \vec{A_1M} = x\vec{A_1C_1} + y\vec{A_1D} - \vec{A_1M} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m},$$

$$\vec{MN} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}$$

3) $\vec{MN} \perp (DA_1C_1), след, \vec{MN} \perp \vec{a}, \vec{MN} \perp \vec{b}, значит, \vec{MN} \cdot \vec{a} = 0, \vec{MN} \cdot \vec{b} = 0$.

Составим систему из скалярных произведений указанных векторов.

$$\begin{cases} (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{m}) \cdot \vec{b} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x\vec{a}^2 + y\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{m} = 0, \\ x\vec{a}\vec{b} + y\vec{b}^2 - \vec{b}\vec{m} = 0. \end{cases}$$

Результаты скалярных произведений векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ удобно занести в таблицу:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{m}$
$\vec{a}$	4	2	0
$\vec{b}$	2	3	$\frac{1}{2}$
$\vec{m}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

4) Подставив найденные значения в систему, найдем координаты x и y

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0, \\ 2x + 3y - \frac{1}{2} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2x, \\ -4x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{8}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Итак, $\vec{MN} = -\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{m}$.

5) $\left|\vec{MN}\right| = \sqrt{MN^2}$

$$\vec{MN}^2 = \left(-\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{m}\right)^2 = \frac{1}{64}\vec{a}^2 + \frac{1}{16}\vec{b}^2 + \vec{m}^2 - \frac{1}{16}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{b}\vec{m} =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} - \frac{2}{16} + 0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{8};$$

$$\left|\vec{MN}\right| = \sqrt{\frac{1}{8}}; \quad \left|\vec{MN}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

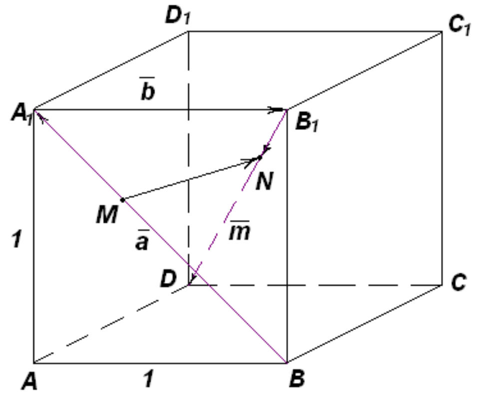
Задача 2

В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и DB_1.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-куб

$AB = 1$

Найти: $\rho(BA_1;DB_1)$.



Решение:

1) ρ(BA_1;DB_1) = MN, где $MN \perp BA_1$, $MN \perp DB_1$, $M \in BA_1$, $N \in DB_1$ (MN – длина общего перпендикуляра к BA_1 и DB_1.

2) Пусть $\vec{BA_1} = \vec{a}$, $\vec{A_1B_1} = \vec{b}$, $\vec{B_1D} = \vec{m}$. Используя правило сложения векторов, получаем векторное равенство

$$\vec{MN} = \vec{MA_1} + \vec{A_1B_1} + \vec{B_1N} = x\vec{BA_1} + \vec{A_1B_1} + y\vec{B_1D} = x\vec{a} + \vec{b} + y\vec{m},$$

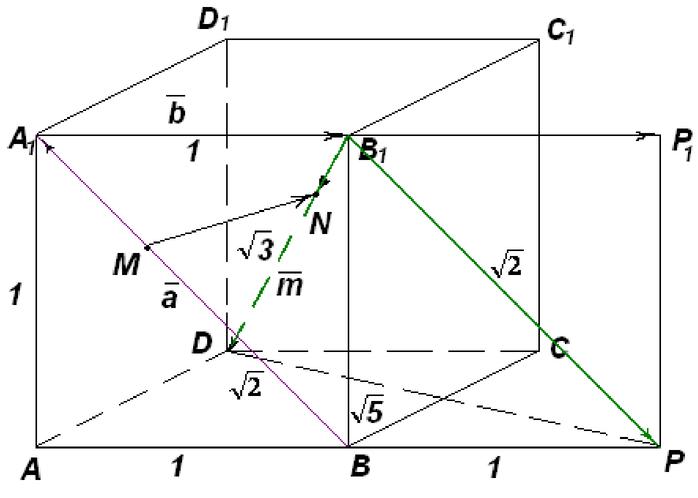
$$\vec{MN} = x\vec{a} + \vec{b} + y\vec{m}$$

3) $\vec{MN} \perp \vec{a}, \vec{MN} \perp \vec{m},$ *значит,* $\vec{MN} \cdot \vec{a} = 0, \vec{MN} \cdot \vec{m} = 0$.

Составим систему из скалярных произведений указанных векторов.

$$\begin{cases} (x\vec{a} + \vec{b} + y\vec{m}) \cdot \vec{a} = 0, \\ (x\vec{a} + \vec{b} + y\vec{m}) \cdot \vec{m} = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x\vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + y\vec{a}\vec{m} = 0, \\ x\vec{a}\vec{m} + \vec{b}\vec{m} + y\vec{m}^2 = 0. \end{cases}$$

Для вычисления скалярных произведений между векторами воспользуемся рисунком



Результаты скалярных произведений векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{m}$ удобно занести в таблицу:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{m}$
$\vec{a}$	2	-1	0
$\vec{b}$	-1	1	-1
$\vec{m}$	0	-1	3

$$\begin{cases} 2x-1=0, \\ -1+3y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\vec{MN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{m} \qquad \left|\vec{MN}\right|=\sqrt{\vec{MN}^2}$$

$$\vec{MN}^2=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{m}\right)^2=\frac{1}{4}\vec{a}^2+\vec{b}^2+\frac{1}{9}\vec{m}^2+\vec{a}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\vec{m}+\frac{2}{3}\vec{b}\vec{m}=$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}-1+0-\frac{2}{3}=\frac{1}{6};$$

$$MN=\left|\vec{MN}\right|=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Задача 3

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник ABCD, в котором AB = 5, AD = $\sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма,

AB = 5,

AD = $\sqrt{33}$,

$\rho(A_1C_1;BD) = \sqrt{3}$,

DM = MC,

$M\in\alpha$,

$B_1D\perp\alpha$,

$\beta = (AA_1D_1)\wedge \alpha$

Найти: tg β

Решение:

Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными им прямыми.

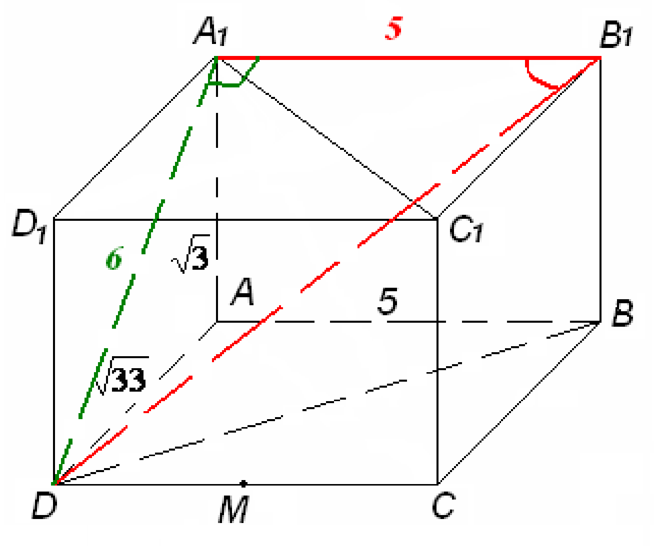
В нашем случае $(AA_1D_1) \perp A_1B_1$.

По условию $B_1D \perp \alpha$.

Значит, искомый угол $\beta = \angle A_1B_1D_1$

$\rho(A_1C_1;BD) = \sqrt{3}$, значит, $AA_1 = \sqrt{3}$,

$\triangle DA_1B_1$ – прямоугольный



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{DA_1}{A_1B_1},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{5},$$

$\operatorname{tg}\beta = 1{,}2$.

Ответ: 1,2.

Список задач для самостоятельного решения

1. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна $\sqrt{2}$, а высота равна 1.Точка M – середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. В правильной треугольной пирамиде SABC с основанием ABC известны ребра $AB = 20\sqrt{3}$, $SC = 29$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Ответ: arctg 21/40.

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями AB_1C_1 и BA_1D_1.

Ответ: 0.

4. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1 найдите тангенс угла между плоскостями SAD и SBD.
Ответ: $\sqrt{2}$.
5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B, перпендикулярно прямой AK, если точка K - середина ребра C_1D_1.
Ответ: 2
6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 2$, $AD = 3$. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и CB_1.
Ответ: 3
7. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник ABCD, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
8. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основание по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.
Ответ: 2 или 14.
9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.
Ответ: 0,25

Литература

Беккер Б.М., Некрасов В.Б. Применение векторов для решения задач. Учебное пособие по математике для учащихся 8-11 кл. – СПб, «СМИО Пресс», 2002
ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания / под ред А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2012
Прасолов В.В. Задачи по планиметрии, т.2 Москва, Наука, 1995
Скопец З.А. Геометрические миниатюры. Москва, Просвещение, 1980
Смирнов В.А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача C2. Геометрия. Стереометрия / под ред А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011