Метод координат в пространстве (вычисление углов и расстояний)

НЕОБХОДИМЫЕ ЗНАНИЯ И УМЕНИЯ:

1. Уметь **удачным образом** вводить прямоугольную декартову систему координат в пространстве (ПДСК)
2. Уметь записывать координаты точек во введённой ПДСК
3. Уметь находить координаты вектора, зная координаты его начала и конца (если A(x_1; y_1; z_1) и B(x_2; y_2; z_2) то $\overrightarrow{AB}$ ($x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$))
4. Уметь находить длину вектора (если $\overrightarrow{AB}$ (x; y; z), то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)
5. Уметь находить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (если $\vec{a}$ (x_1; y_1; z_1) и $\vec{b}$ (x_2; y_2; z_2), то $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$)
6. Уметь находить косинус угла между векторами и сам угол ($\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$)
7. Уметь **сопоставлять** найденный угол между векторами с углом между соответствующими прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями.
8. Знать общий вид **уравнения плоскости** и координаты **вектора нормали** к плоскости (если α: Ax + By + Cz + D = 0, то $\vec{n}$ (A; B; C))
9. Уметь записывать уравнение плоскости по трём точкам, через которые она проходит, решая соответствующую систему уравнений.
10. Знать, какой вид имеет уравнение плоскости: а) проходящей через начало координат б) параллельной координатной оси в) параллельной координатной плоскости
10. Знать формулу, задающую расстояние от точки A(x_0; y_0; z_0) до плоскости α: Ax + By + Cz + D = 0 ($r(A;\ \alpha) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$)
11. Уметь задачи о вычислении расстояний: а) **от прямой до плоскости** б) **между параллельными плоскостями** в) **между скрещивающимися прямыми** сводить к **<u>основной задаче</u>** вычисления расстояния от точки до плоскости.

Задача 1. Вычисление угла между двумя прямыми в пространстве.

В пространстве даны две прямые AB и CD (пересекающиеся, скрещивающиеся или параллельные). Найти угол между ними.

Решение:

1) введём прямоугольную декартову систему координат в пространстве (ПДСК).
2) запишем координаты точек A, B, C, D во введённой системе координат.
3) найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
4) найдём длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и их скалярное произведение.
5) найдём косинус угла между $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (**пусть он равен t**, t ∈ [-1;1])
6) **косинус угла между прямыми AB и CD равен |t|, тогда $\angle$(AB;CD) = arccos |t|**

Задача 2. Вычисление угла между прямой и плоскостью в пространстве.

В пространстве даны две прямая AB и плоскость MNK, которую она пересекает. Найти угол между ними.

Решение:

1) введём прямоугольную декартову систему координат в пространстве (ПДСК).
2) запишем координаты точек A и B во введённой системе координат.
3) найдём координаты вектора $\overrightarrow{AB}$
4) запишем уравнение плоскости MNK
5) найдём координаты вектора $\vec{n}$ - вектора нормали к плоскости MNK
6) найдём косинус угла между $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{n}$ (**пусть он равен t**, t ∈ [-1;1])
7) **синус угла между прямой AB и плоскостью MNK равен |t|, тогда $\angle$(AB; MNK) = arcsin |t|**

Задача 3. Вычисление угла между двумя плоскостями в пространстве.

В пространстве даны плоскость ABC и плоскость MNK. Найти угол между ними.

Решение:

1) введём прямоугольную декартову систему координат в пространстве (ПДСК).
2) запишем уравнение плоскости ABC
3) запишем уравнение плоскости MNK
4) найдём координаты вектора $\overrightarrow{n_1}$ - вектора нормали к плоскости ABC
5) найдём координаты вектора $\overrightarrow{n_2}$ - вектора нормали к плоскости MNK
6) найдём косинус угла между $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ (**пусть он равен t**, t ∈ [-1;1])
7) **косинус угла между плоскостями ABC и MNK равен |t|, тогда $\angle$(ABC; MNK) = arccos |t|**

Задача 4. Нахождение расстояния от точки до плоскости.

В пространстве даны точка S и плоскость MNK. Найти расстояние от точки S до плоскости MNK.

Решение:

1) введём прямоугольную декартову систему координат в пространстве (ПДСК).
2) запишем координаты точки S во введённой системе координат (пусть координаты S(x_0; y_0; z_0))
3) запишем уравнение плоскости MNK (оно будет иметь вид Ax + By + Cz + D = 0)
4) Тогда **r (S; MNK)** = $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Задача 5. Нахождение расстояния между параллельными прямой и плоскостью.

В пространстве даны прямая AB и плоскость MNK, AB || MNK. Найти расстояние между ними.

Решение: возьмём **любую точку S** на прямой AB и найдём расстояние от неё до плоскости MNK (см. задачу 4).

Тогда r (AB; MNK)= r (S; MNK)

Задача 6. Нахождение расстояния между параллельными плоскостями.

В пространстве даны две параллельные плоскости ABC и MNK. Найти расстояние между ними.

Решение: возьмём **любую точку S** в плоскости ABC и найдём расстояние от неё до плоскости MNK (см. задачу 4).

Тогда r (ABC; MNK)= r (S; MNK)

Задача 7. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

В пространстве даны скрещивающиеся прямые AB и CD. Найти расстояние между ними.

Решение: зафиксируем прямую AB. Возьмём произвольную точку N на прямой CD и проведём через неё прямую A_1B_1, параллельную AB. Через прямые CD и A_1B_1 проведём плоскость α. Тогда r (AB; CD) = r (AB; α), причём AB || α. Таким образом, задача свелась к задаче 5.

ПРИМЕР

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, AB = 6. Точки O, O_1 H – центры граней куба, E – центр куба, точки M, N, K, F, G – середины соответствующих рёбер куба.

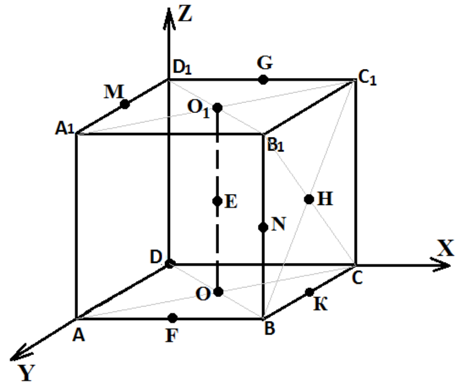
Найти: 1) угол между прямыми MF и O_1H

2) угол между прямой MF и плоскостью AO_1H

3) угол между плоскостью AO_1H и плоскостью AA_1D_1

4) расстояние от точки O до плоскости AO_1H

5) расстояние между скрещивающимися прямыми AH и C_1M



Решение: **1)**

1. Введём ПДСК в пространстве так, как показано на рисунке
2. Запишем координаты нужных точек во введённой ПДСК

M(0;3;6), F(3;6;0), O_1(3;3;6), H(6;3;3), A(0;6;0), O(3;3;0), C_1(6;0;6)

3. Найдём координаты векторов $\overline{MF}$ и $\overline{O_1H}$: $\overline{MF}$ (3-0; 6-3; 0-6) = $\overline{MF}$ **(3;3;-6)**

$\overline{O_1H}$ (6-3; 3-3; 3-6) = $\overline{O_1H}$ **(3; 0; -3)**

4. Найдём длины векторов $\overline{MF}$ и $\overline{O_1H}$: $|\overline{MF}| = \sqrt{3^2+3^2+(-6)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$|\overline{O_1H}| = \sqrt{3^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

5. Найдём скалярное произведение векторов $\overline{MF}$ и $\overline{O_1H}$: $\overline{MF} \cdot \overline{O_1H}$ = 3·3+3·0+(-6)·(-3) = **27**

6. Найдём косинус угла между векторами $\overline{MF}$ и $\overline{O_1H}$: $\cos\alpha = \dfrac{27}{3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. cos ∟(MF; O_1H) = $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, значит ∟(MF; O_1H) = **30^0**

<u>**Замечание:**</u> данную задачу можно решить и геометрически, если заметить, что угол между прямыми (скрещивающимися!) MF и O_1H равен углу между прямыми MF и ME, т.е. это угол FME. А его можно найти из одноимённого треугольника по теореме косинусов, предварительно найдя его стороны. **ПРОДЕЛАЙТЕ ЭТО САМОСТОЯТЕЛЬНО!**

2)

1. Запишем уравнение плоскости AO_1H: **A(0;6;0), O_1(3;3;6), H(6;3;3)**

подставим координаты точек в общее уравнение плоскости Ax+By+Cz+D = 0. Получим систему уравнений: $\begin{cases} 6B+D=0 \\ 3A+3B+6C+D=0 \\ 6A+3B+3C+D=0 \end{cases}$

выразим из первого уравнения B через D и подставим во 2 и 3 уравнение. После упрощений получим: $\begin{cases} 6B+D=0 \\ 3A+6C+0{,}5D=0 \\ 6A+3C+0{,}5D=0 \end{cases}$

выразим A через C и D из второго уравнения и подставим в 3 уравнение. После упрощений окончательно получим: $\begin{cases} B=-\frac{1}{6}D \\ A=-\frac{1}{18}D \\ C=-\frac{1}{18}D \end{cases}$

Подставим найденные значения A, B, C в уравнение плоскости, получим:

$-\dfrac{1}{18}Dx - \dfrac{1}{6}Dy - \dfrac{1}{18}z + D = 0$. Поделив на D и умножив на (-18) обе части уравнения окончательно получим: <u>**AO_1H: x + 3y + z -18 =0**</u>

2. Вектор нормали к плоскости AO_1H имеет координаты $\vec{n}$ (1;3;1)

3. Найдём косинус угла между векторами $\overline{MF}$ **(3;3;-6)** и $\vec{n}$ **(1;3;1)**.

Получим $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{66}}$

4. Синус угла между прямой MF и плоскостью AO_1H равен $\dfrac{2}{\sqrt{66}}$,

значит ∟(MF; AO_1H) = **arcsin** $\dfrac{2}{\sqrt{66}}$

3)

1. AO_1H: **x + 3y + z -18 =0**,

AA_1D_1: **x = 0** (т.е. 1·x + 0·y + 0·z + 0 = 0)

2. Векторы нормали к данным плоскостям имеют координаты:

$\overrightarrow{n_1}$ (1;3;1), $\overrightarrow{n_2}$ (1;0;0)

3. Найдём косинус угла между векторами $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$. Получим $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$

4. Косинус угла между данными плоскостями равен $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$,

значит ∟(AO_1H; AA_1D_1) = arccos $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$

4)

1. AO_1H: **x + 3y + z -18 =0, O(3;3;0)**

r (O; AO_1H) = $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$

$= \dfrac{|1\cdot3+3\cdot3+1\cdot0+(-18)|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \dfrac{|-6|}{\sqrt{11}} = \dfrac{6}{\sqrt{11}}$

5)

1. Зафиксируем прямую C_1M. Через точку A на прямой AH проведём прямую, параллельную прямой C_1M. Это прямая AK. (**докажите, что AK||C_1M, рассмотрев четырёхугольник AKC$_1$M и доказав, что он – параллелограмм)**

2. Тогда C_1M || AKH и <u>расстояние между данными скрещивающимися прямыми AH и C_1M равно расстоянию между прямой C_1M и плоскостью AKH. Таким образом, задача свелась к **Задаче 5.**</u>

3. Запишем уравнение плоскости AKH **(сделайте это самостоятельно!)**

получим AKH: x + 2y + 0z - 12 = 0

4. r (C_1M; AKH) = r (C_1; AKH)

C_1(6;0;6), AKH: x + 2y + 0z - 12 = 0

r (C_1; AKH) = $\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$

$= \dfrac{|1\cdot6+2\cdot0+0\cdot6+(-12)|}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \dfrac{|-6|}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

Итак, r (AH; C_1M) = $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

---

1) Найдите угол между прямыми MH и GK (двумя способами!)

2) Найдите угол между прямой MH и плоскостью A_1C_1K

3) Найдите угол между плоскостями A_1C_1K и ABC (двумя способами!)

4) Найдите расстояние от точки B до плоскости A_1C_1K

5) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми DA_1 и KF

6*) Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми MH и GK